AGRA2021

Introducción al análisis de Fourier de orden superior

Ejercicios

Ejercicio 1 (La norma U^2 y la transformada de Fourier)**.**
Demostrar que la norma U^2 en un grupo abeliano finito Z cumple la fórmula $\|f\|_{U^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^4}$ para cualquier función $f:\mathrm{Z}\to\mathbb{C}$. Demostrar también que $\|f\|_{u^2} \leq \|f\|_{U^2} \leq \|f\|_{u^2}^{1/2}\,\|f\|_{L^2}^{1/2}$.

Ejercicio 2. Sea $A\subseteq \mathbb{F}_p^n$ un conjunto de cardinal αp^n, y supongamos que existe $t\neq 0$ tal que $|\widehat{1_A}(t)|\geq \theta\alpha$ para algún $\theta\in(0,1]$. Demostrar que existe un subespacio $V\leq \mathbb{F}_p^n$ de codimensión 1 en uno de cuyos trasladados A tiene densidad al menos $\alpha(1+\theta/2)$.

Ejercicio 3 (Teorema de Meshulam)**.** †
Iterando, tal como sugerido en la diapositiva 8, la proposición del curso sobre el control de S_3 por la transformada de Fourier y el ejercicio anterior, deducir el teorema de Meshulam. Es decir, demostrar que existe una constante C tal que todo conjunto $A\subseteq\mathbb{F}_3^n$ de cardinal mayor que $C3^n/n$ contiene una progresión aritmética de tres términos.

Ejercicio 4 (Teorema de Varnavides)**.** Considerando el teorema de Meshulam en subespacios de $\mathbb{F}_p^n$ de dimensión apropiadamente elegida, deducir el teorema de Varnavides. Es decir, mostrar que para todo $1>\alpha>0$, existe una constante $c(\alpha)>0$ tal que para cada $n\in\mathbb{N}$ y todo conjunto $A\subseteq\mathbb{F}_p^n$ de densidad α, tenemos $\mathbb{E}_{x,d}1_A(x)1_A(x+d)1_A(x+2d)\geq c(\alpha)$.

Ejercicio 5 (Aplicación combinatoria de las normas U^d)**.**
Sea $k\in\mathbb{N}$, sea Z un grupo abeliano finito de orden coprimo con $(k-1)!$, sea $A\subset\mathrm{Z}$ con $|A|=\alpha|\mathrm{Z}|$, y sea $S_k(1_A)=\mathbb{E}_{x,d\in\mathrm{Z}}1_A(x)1_A(x+d)\cdots 1_A(x+(k-1)d)$. Usando el Teorema de Von Neumann generalizado, demostrar que $|S_k(A)-\alpha^k|\leq 2^k\|f_A\|_{U^{k-1}}$.

Ejercicio 6. †
Sea Z un grupo abeliano finito de orden impar, y sea $\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $(x,y)\mapsto x\cdot y$ una forma bilineal simétrica no-degenerada. Demostrar que el mapeo $\phi:\mathrm{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es cuadrático sobre Z si y solo si existe un homomorfismo autoadjunto $M:\mathrm{Z}\to\mathrm{Z}$, un elemento $\xi\in\mathrm{Z}$, y algún $\theta\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tales que para todo $x\in\mathrm{Z}$ se tiene $\phi(x)=M(x)\cdot x+\xi\cdot x+\theta$.

Ejercicio 7.
Sea B un subconjunto finito de un grupo abeliano, y supongamos que $|B-B| \leq K|B|$ para alguna constante $K \geq 1$. Entonces B tiene al menos $|B|^3/K$ cuaternas aditivas, es decir, existen al menos $|B|^3/K$ cuaternas $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in B^4$ tales que $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$.

Pista: nótese que $\sum_{b\in B-B}\sum_x 1_B(x)1_B(x+b) = |B|^2$, y que el número de cuaternas aditivas en B es igual a $\sum_{b\in B-B}\big(\sum_x 1_B(x)1_B(x+b)\big)^2$.

Ejercicio 8.
Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito, sea V un subespacio de $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n$, y sea $V_0 = V \cap (\{0\} \times \mathbb{F}^n)$. Demostrar que existe un subespacio $W_1 \leq \mathbb{F}^n$ y un mapeo lineal $M : W_1 \to \mathbb{F}^n$ tal que el subespacio $V_1 := \{(h, M(h)) : h \in W_1\} \leq \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n$ cumple $V_0 + V_1 = V$.

Ejercicio 9.
Sea Z un grupo abeliano finito, y sean f_1, f_2, f_3 funciones $\mathrm{Z} \to \mathbb{C}$ con $|f_2|, |f_3| \leq 1$. Entonces $|\mathbb{E}_{x_1,x_2\in \mathrm{Z}} f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_1+x_2)| \leq \|f_1\|_{u^2}$.

Pista: adaptar la prueba de la proposición en la diapositiva 7.

Ejercicio 10.
Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}$ de orden impar. Supongamos que $\dim V \geq 3$, y sea $M : V \to V$ un mapeo lineal autoadjunto. Demostrar que $M(x)\cdot x = 0$ para algún $x \in V \setminus \{0\}$.

Pista: nótese que podemos suponer que M es biyectivo; dado esto, demostrar que para todo $t \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ tenemos $|\mathbb{E}_{x\in V}\, e\big(tM(x)\cdot x\big)|^2 = |\mathbb{F}|^{-\dim V}$; luego, combinar esto con la inversión de Fourier para obtener una cota inferior para $\mathbb{P}_V(x : M(x)\cdot x = 0)$ que sea suficientemente grande si $\dim V \geq 3$.

Ejercicio 11.
Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}$ de orden impar, y sea $M : V \to V$ un mapeo lineal autoadjunto. Sea U un subespacio de V de cardinalidad máxima dada la propiedad $M(x)\cdot y = 0$ para todo $x, y \in U$. Demostrar que $\dim(U) \geq \frac{1}{2}\dim(V) - \frac{3}{2}$.

Pista: considerar el complemento ortogonal $U^\perp := \{y \in V : \forall\, x \in U,\, M(x)\cdot y = 0\}$, y usar el ejercicio anterior para demostrar por contradicción que $\dim U^\perp < 3 + \dim U$.

Los ejercicios marcados con “†” son más difíciles.