Z $\quad f: Z \longrightarrow \mathbb{C}$ queremos ver que

$$\|f\|_{U^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^4}$$

$$\|f\|_{U^2}^4 = \underbrace{\mathbb{E}_{x,h_1,h_2 \in Z}} f(x)\overline{f(x+h_1)}\,\overline{f(x+h_2)}\,f(x+h_1+h_2)$$

$$= \mathbb{E}_{x\in Z}\mathbb{E}_{h_1\in Z}\mathbb{E}_{h_2\in Z}$$

$$f(x) = \sum_{\xi \in Z} \hat{f}(\xi)\, e(x\cdot\xi) \qquad \hat{f}(\xi) = \mathbb{E}_x f(x)\, e(-\xi\cdot x)$$

$$e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$$

$$(\cdot\ ) : Z \times Z \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{forma}$$

bilineal, simétrica no degenerada.

Ejemplo: $Z = \mathbb{F}_p^n$ $\qquad \mathbb{F}_p^n \times \mathbb{F}_p^n \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$((x_1,\dots x_n),(y_1,\dots,y_n)) \longrightarrow \frac{x_1y_1+\dots+x_ny_n}{p}$$

$$\|f\|_{U^2}^4 = \mathbb{E}_{x,h_1,h_2} \sum_{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4} \hat{f}(\xi_1)\, e(x\cdot\xi_1)\,\overline{\hat{f}(\xi_2)}\, e(-(x+h_1)\cdot\xi_2)$$

$$\overline{\hat{f}(\xi_3)}\, e(-(x+h_2)\cdot\xi_3)\,\hat{f}(\xi_4)\, e((x+h_1+h_2)\cdot\xi_4)$$

$$= \sum_{\xi_1,\dots\xi_4} \hat{f}(\xi_1)\overline{\hat{f}(\xi_2)}\,\overline{\hat{f}(\xi_3)}\,\hat{f}(\xi_4)\,\cdot$$

$$\cdot\, \mathbb{E}_{x,h_1,h_2}\, e(x\cdot(\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4))$$

$$\cdot\, e(h_1\cdot(\xi_4-\xi_2))$$

$$\cdot\, e(h_2\cdot(\xi_4-\xi_3))$$

$$\mathbb{E}_x e(x\cdot\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

$$\|f\|_{U^2}^4 = \sum_{\xi_1,\dots,\xi_4} \hat{f}(\xi_1)\dots\hat{f}(\xi_4)\, \mathbb{1}_{\{\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4=0\}}$$

$$\mathbb{1}_{\{\xi_4-\xi_2=0\}}$$

$$\mathbb{1}_{\{\xi_4-\xi_3=0\}}$$

$$\implies \xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_4$$

$$= \sum_\xi \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}\,\overline{\hat{f}(\xi)}\hat{f}(\xi) = \sum_\xi |\hat{f}(\xi)|^4$$

$$= \|\hat{f}\|_{\ell^4}^4$$

$$\|f\|_{u^2} := \max_\xi |\hat{f}(\xi)|$$

$\|f\|_{u^2} \leq \|f\|_{U^2}$ ya que

$$\|f\|_{U^2}^4 = \sum_\xi |\hat{f}(\xi)|^4 \geq \max_\xi |\hat{f}(\xi)|^4$$

$$\|f\|_{U^2}^4 = \sum_\xi |\hat{f}(\xi)|^4 \leq \|f\|_{u^2}^2 \underbrace{\sum_\xi |\hat{f}(\xi)|^2}_{\text{Plancharel}}$$

de estos 4 factores, acotamos 2 de ellos por $\|f\|_{u^2}$

$\|f\|_{L^2}^2$

$$\|f\|_{U^2} \leq \|f\|_{u^2}^{1/2}\,\|f\|_{L^2}^{1/2}$$

Ej. 2

$A \subset \mathbb{F}_p^n \quad |A|/p^n = \alpha$ y sup. $\exists t \neq 0$ tal que

$$\underbrace{|\hat{1}_A(t)| \geq \Theta\alpha}, \quad \Theta \in (0,1].$$

Dem

$$f_A(x) = 1_A(x) - \alpha \qquad \hat{f}_A(\xi) = \hat{1}_A(\xi) - \alpha\,\delta_{\{\xi=0\}}$$

Ya que $t \neq 0 \implies \hat{f}_A(t) = \hat{1}_A(t)$

$$\alpha\Theta \leq \hat{f}_A(t)\, e(\xi) = \mathrm{Re}\left(\mathbb{E}_x f_A(x)\, e(-x\cdot t + \xi)\right)$$

depende de t

$$= \mathrm{Re}\left(\mathbb{E}_x f_A(x)\left(e(-x\cdot t + \xi) + 1\right)\right)$$

estamos sumando $\mathbb{E}_x f = 0$

Sea $V := \{t\}^{\perp}$ y sea $x_0 \in V$

$$\underline{\mathbb{E}_{x\in\mathbb{F}_p^n}\, g(x)} = \underline{\mathbb{E}_{x\in\mathbb{F}_p^n}\, g(x+x_0)} \quad \forall x_0 \in \mathbb{F}_p^n$$

$$\alpha\Theta \leq \mathrm{Re}\left(\mathbb{E}_x f_A(x+x_0)\left(e(-x\cdot t + \xi) + 1\right)\right)$$

recordemos que $x_0 \cdot t = 0 \quad x_0 \in \{t\}^{\perp}$

tomamos $\mathbb{E}_{x_0\in V}$

$$\alpha\Theta \leq \mathrm{Re}\left(\mathbb{E}_{x_0\in V}\,\mathbb{E}_{x\in\mathbb{F}_p^n} f(x+x_0)\left(e(-x\cdot t+\xi)+1\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}_{x\in\mathbb{F}_p^n}\Big(\underbrace{\mathbb{E}_{x_0\in V} f(x+x_0)}_{\in\mathbb{R}}\Big)\,\mathrm{Re}\left(e(-x\cdot t+\xi)+1\right)$$

$\exists\, x \in \mathbb{F}_p^n$ tal que

$$0 < \alpha\Theta \leq \underbrace{\mathbb{E}_{x_0 \in V}\, f_A(x+x_0)}_{\geq 0} \underbrace{\big(\mathrm{Re}\big(e(-x\cdot t \cdot \xi)\big) + 1\big)}_{\in [0,2]}$$

$$\leq \left(\mathbb{E}_{x_0 \in V}\, f_A(x+x_0)\right) \cdot 2$$

$$\mathbb{E}_{x_0 \in V}\, f_A(x+x_0) \geq \alpha\Theta/2 \implies$$ Densidad de A en $x+V$ es al menos $\alpha + \frac{\alpha\Theta}{2}$

$f_A = 1_A - \alpha$

Ejemplo 3

Queremos ver que si $A \subset \mathbb{F}_p^n$ NO tiene progresiones aritméticas no triviales de longitud 3, entonces $|A|/p^n \leq C/n$

Dem

Paso 1: $\quad |S_3(1_A) - \alpha^3| \leq \max_{\xi \neq 0} |\hat{1}_A(\xi)|$

$$S_3(1_A) := \mathbb{E}_{x,d}\, 1_A(x)\, 1_A(x+d)\, 1_A(x+2d)$$

Si A no tiene 3-PA entonces los sumandos anteriores son $\neq 0$ sólo cuando $d=0$

$$S_3(1_A) = \frac{1}{(p^n)^2} \sum_x 1_A(x) = \frac{\alpha}{p^n}$$

Claim $\quad \frac{\alpha}{p^n} \leq \frac{\alpha^3}{2}$. Ya que si no, el resultado es trivial.

Usando esto, si A no tiene PA-3 entonces

$$\boxed{\max_{\xi \neq 0} |\hat{1}_A(\xi)| \geq \frac{\alpha^3}{2}}$$

$\frac{\alpha}{p^n} \geq \frac{\alpha^3}{2} \Rightarrow \quad \alpha \leq \frac{2^{1/2}}{(p^n)^{1/2}}$ y queríamos probar que $\alpha \leq C/n$

Aplicamos el ejercicio anterior, con $\Theta = \frac{\alpha^2}{2}$, la condición es que en un subespacio afín de codimensión 1 tenemos que la densidad de A (en el subespacio V_1) es al menos

$\alpha + \frac{\alpha^3}{4} \qquad V_1 \simeq \mathbb{F}_p^{n-1}$

Iterando el argumento, pasaríamos a un $V_2 \simeq \mathbb{F}_p^{n-2}$ tal que $|A \cap V_2| / |V_2| \geq \alpha + 2 \cdot \frac{\alpha^3}{4}$

$\vdots$

tras $t = \frac{4}{\alpha^2}$ pasos $\qquad |A \cap V_t| / |V_t| \geq 2\alpha \qquad V_t \simeq \mathbb{F}_p^{n-t}$

Repetiríamos la estrategia PERO usando que ahora tenemos densidad 2α.

Ahora bastan $\frac{4}{(2\alpha)^2}$ pasos para tener

$$|A \cap V_{t+t'}| / |V_{t+t'}| \geq 4\alpha$$

$$\frac{4}{\alpha^2} + \frac{4}{(2\alpha)^2} + \frac{4}{(4\alpha)^2} + \frac{4}{(8\alpha)^2} + \dots = \frac{4}{\alpha^2} \cdot C > n$$

o si no, contradicción al rebasar la densidad máxima

$$\Rightarrow \alpha \leq C' / \sqrt{n}$$

Nota.- Si en vez de $|S_3(1_A) - \alpha^3| \leq \max_{\xi \neq 0} |\hat{1}_A(\xi)|$ usamos $|S_3(1_A) - \alpha^3| \leq \alpha \cdot \max_{\xi \neq 0} |\hat{1}_A(\xi)|$ sale Meshulam

Ej 4 (Varnavides)

Si $A \subset \mathbb{F}_p^n$ $\quad |A|/p^n = \alpha \Rightarrow \mathbb{E}_{x,d} 1_A(x) 1_A(x+d) 1_A(x+2d) \geq c(\alpha)$

Dem

Sea $k \leq n$ (dispondremos más adelante)

Sea W un subespacio lineal de $\mathbb{F}_p^n$ de dimensión k.

$V = \mathbb{F}_p^n$

$$\alpha = \mathbb{E}_{x \in V} 1_A(x) = \mathbb{E}_{x\in V} \underbrace{\mathbb{E}_{y \in W} 1_A(x+y)}_{g(x,W)}$$

$$\alpha = \mathbb{E}_{\substack{x\in V\\ g(x,W)\geq \alpha/2}} g(x,W) + \mathbb{E}_{\substack{x\in V\\ g(x,W)<\alpha/2}} g(x,W)$$

$$\leq P(x\in V : g(x,W)\geq \alpha/2) + \alpha/2$$

$$\Rightarrow \quad P(x \in V : g(x,W) \geq \alpha/2) \geq \alpha/2$$

$$\# \{x\in V : g(x,W) \geq \alpha/2\} \geq \frac{\alpha p^n}{2}$$

Esto lo hemos hecho para un W fijo.

¿Cuántos $W \leq V$ con $\dim W = k$ hay?

$$(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\cdots(p^n-p^{k-1})$$

esto es el # de subespacios lineales de dimensión k en $\mathbb{F}_p^n$.

$$\# \{x \in V, W \leq V : g(x,W) \geq \alpha/2\} \geq \frac{\alpha p^n}{2}(p^n-1)\cdots(p^n-p^{k-1})$$

Obs.-

Por Meshulam, si $k \geq k(\frac{\alpha}{2})$ $\Rightarrow$ cualquier subespacio de dimensión k contiene (al menos) una PA-3 no trivial.

$$\#\{x \in V, W \leq V : \underbrace{g(x,W)}_{\substack{\text{la densidad de } A \\ \text{en el subespacio } x+W}} \geq \alpha/2\} \geq \frac{\alpha p^n}{2}(p^n-1)\cdots(p^n-p^{k-1})$$

$$\#\{x \in V, W \leq V : g(x,W) \geq \alpha/2\} \leq \#\{\text{PA-3 en } A \text{ no triviales}\} \cdot C$$

Fijamos una PA-3 no trivial $a, a+d, a+2d$.

¿En cuántos espacios de la forma $x+W$ puede aparecer?

W debe contener a d, por tanto, el # de subespacios que contienen a d es

$$(p^n-p)\cdots(p^n-p^{k-1})$$

Si W contiene a d, ¿Cuántos $x \in V$ posibles hay?

Sólo nos valen los $x \in a+W$ y $|a+W| = p^k$.

Por tanto, $C \leq \underbrace{p^k}_{\substack{\text{elecciones} \\ \text{de } x}} \cdot \underbrace{(p^n-p)\cdots(p^n-p^{k-1})}_{\text{elecciones de } W}$

Sustituyendo tenemos que:

$$\#\{\text{PA-3}\} \geq \frac{\alpha p^n}{2p^k}(p^n-1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{recordemos que} \\ k=k(\alpha/2)}}{\geq} c(\alpha)(p^n)^2$$