Ej 6

Probar que $\phi: Z \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es cuadrática si y solo si $\phi(x) = Mx\cdot x + \xi\cdot x + c$ para cierto $M: Z \longrightarrow Z$ homomorfismo simétrico y ciertos $\xi \in Z$ y $c \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Nota: el orden de Z es impar.

Dem.-

$\Rightarrow$] Para todo $h \in Z$, $(h\nabla_x)\phi(x) := \phi(x+h) - \phi(x)$

Si ϕ cuadrática $\Rightarrow (h\nabla_x)\phi(x)$ es lineal.

$$(h\nabla_x)\phi(x) = \xi_h\cdot x + p(h)$$

donde $p(h)$ es una función que depende de h, pero cuyo valor no es importante.

Usaremos el nombre $p(x,y,h)$ para denotar cualquier función que no nos interese su valor pero sí sus dependencias.

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \xi_h\cdot x + p(h) \quad \forall x,h \in Z$$

Paso 1

Demostrar que ξ_h es lineal.

Aplicamos el operador $(k\nabla_x)$ a ambos lados.

$$(k\nabla_x)\phi(x+h) - (k\nabla_x)\phi(x) = \xi_h\cdot k \quad \forall x,h,k \in Z$$

Aplicamos $(h_1\nabla_h)$

$$\phi(x+k+h) - \phi(x+h) \underline{- \phi(x+k) + \phi(x)} \quad \forall x,k,h,h_1 \in Z$$

$$(h_1\nabla_h)\big(\phi(x+k+h) - \phi(x+h)\big) = (\xi_{h+h_1} - \xi_h)\cdot k$$

$(h_1\nabla_h)(\phi(x+k+h) - \phi(x+h)) = (\xi_{h+h_1} - \xi_h)\cdot k \quad \forall x,k,h,h_1$

$x \longmapsto x-h$

$\phi(x+k+h_1) - \phi(x+k) - \phi(x+h_1) + \phi(x) = (h_1\nabla_h)\xi_h \cdot k \quad \forall x,k,h,h_1$

Y ahora tomamos $h_2\nabla_h$ a cada lado

$$0 = (h_2\nabla_h)(h_1\nabla_h)\xi_h\cdot k \quad \forall x,k,h,h_1,h_2$$

Como el p. escalar es no degenerado y la ecuación anterior vale $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \quad 0 = (h_2\nabla_h)(h_1\nabla_h)\xi_h \quad \forall h,h_1,h_2 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \xi_h$ es lineal y escribimos $\xi_h = 2Mh + \xi_0$ donde $M: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ homomorfismo $\xi_0 \in \mathbb{Z}$ y hemos añadido el 2 porque $|\mathbb{Z}|$ es impar y por tanto multiplicar por 2 es biyección.

Paso 2

Demostrar simetría de M

$(h\nabla_x)\phi(x) = \xi_h\cdot x + p(h)$ y sustituimos ξ_h

$\Rightarrow$ (1) $\phi(x+h) - \phi(x) = 2Mh\cdot x + \xi_0\cdot x + p(h) \quad \forall x,h \in \mathbb{Z}$

Ahora renombramos x por y y restamos

(1') $\phi(y+h) - \phi(y) = 2Mh\cdot y + \xi_0\cdot y + p(h) \quad \forall y,h \in \mathbb{Z}$

restamos (1')-(1) y obtenemos

$$p(x+h) + p(y+h) + p(x) + p(y) - 2Mh\cdot(y-x) = 0$$

Cambio de variable $h \longmapsto h-x-y \quad \forall x,y,h \in \mathbb{Z}$

y queda

$$p(x,h) + p(y,h) - 2M(h-x-y)\cdot(y-x) = 0 \quad \forall x,y,h$$

Reagrupando términos tenemos que

$$p(x,h) + p(y,h) + 2\{x,y\} = 0 \quad \forall x,y,h \in Z$$

donde $\{x,y\} = Mx\cdot y - My\cdot x$

Fijamos un $h \in Z$ cualquiera y tenemos

$$p(x) + p(y) + 2\{x,y\} = 0 \quad \forall x,y \in Z$$

reitamos $p(x) + p(y') + 2\{x,y'\} = 0 \quad \forall x,y' \in Z$

$$p(y) + p(y') + 2\{x, y'-y\} = 0 \quad \forall x,y,y' \in Z$$

La función $x \longrightarrow \{x, y'-y\}$ no depende de x y en $x=0$ vale 0 tenemos que $\{x, y-y'\} = 0 \quad \forall x,y,y' \in Z$

Deshaciendo $\{x,y-y'\}$ tenemos que

$$Mx\cdot(y'-y) = M(y'-y)\cdot x \quad \forall x,y,y' \in Z$$

$\Rightarrow$ M es simétrica $Mx\cdot y = My\cdot x \quad \forall x,y \in Z$

Volviendo a (1) usamos que M es simétrica para escribir (1) de la siguiente forma:

$$2Mh\cdot x = M(x+h)\cdot(x+h) - Mx\cdot x - Mh\cdot h$$

Queda

$$p(h) + p(x+h) - \phi(x) + Mx\cdot x - \xi_0\cdot x = 0 \quad \forall x,h \in Z$$

Tomamos $(h_1 \nabla x)$ y queda

$$p(x+h+h_1) - p(x+h) = (h_1 \nabla x)(\phi(x) - Mx\cdot x + \xi_0\cdot x)$$

$$= \phi(x+h_1) - M(x+h_1)\cdot(x+h_1)$$

$$+ \xi_0\cdot(x+h_1) - \phi(x) + Mx\cdot x - \xi_0\cdot x$$

Cambio de variable $h \longmapsto h-x$

$$p(h+h_1) - p(h) = (h_1\nabla_x)\left(\phi(x) - M_x \cdot x + \xi_0 \cdot x\right)$$

y aplicando $(h_2 \nabla_x)$ anulamos la parte izquierda y tenemos lo que buscábamos:

$$0 = (h_2\nabla_x)(h_1\nabla_x)\big(\underbrace{\phi(x) - M_x \cdot x + \xi_0 \cdot x}_{\text{lineal}}\big)$$

$$\text{lineal} = \xi \cdot x + c$$

$$\Rightarrow \phi(x) = M_x \cdot x + (\xi - \xi_0)\cdot x + c.$$

Ej 7

$$|B|^2 = \sum_{b \in B-B} \sum_{x \in \mathbb{Z}} 1_B(x) 1_B(x+b)$$

$$\leq \Big(\sum_{b \in B-B} 1^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{b\in B-B} \Big|\sum_x 1_B(x) 1_B(x+b)\Big|^2\Big)^{1/2}$$

$$= |B-B|^{1/2} (\#\{\text{cuaternas aditivas}\})^{1/2}$$

$$\leq k^{1/2} |B|^{1/2} |b_1+b_2 = b_3+b_4|^{1/2}$$

$$\Rightarrow |b_1+b_2 = b_3+b_4| \geq |B|^3/k$$

$$|B|^2 = \sum_x |b_1, b_2 \in B : b_1 - b_2 = x|$$

$$= \sum_{x \in B-B} \sum_{b_2 \in B} 1_{\{b_2+x \in B\}}$$

$$= \sum_{x \in B-B} \sum_{b_2} 1_B(b_2) 1_B(b_2+x)$$

Ej 8

$V \le \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n$ y $V_0 := V \cap (\{0\} \times \mathbb{F}^n)$. Demostrar que existe $W_1 \le \mathbb{F}^n$ y $M : W_1 \longrightarrow \mathbb{F}^n$ tal que si $V_1 = \{(h, M(h)) : h \in W_1\} \Rightarrow V_0 + V_1 = V$.

Dem

Escribimos una base de V en forma diagonal (o escalonada). Cada elem

$$\begin{array}{cl} e_i & \begin{pmatrix} 0 \dots 0, 1, ?, ? & \dots \\ 0, \dots 0, 0, 1, ?, ? & \dots \\ 0 \quad \dots \quad 0 & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ d_j \end{matrix} \end{array}$$

Sea $\{e_1, \dots e_k, d_1, \dots d_t\}$ base de V donde $e_i = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)})$ para $i = 1, \dots k$ tal que los vectores $\{v_1^{(1)}, \dots, v_1^{(k)}\} \subset \mathbb{F}^n$ son l. independientes.

Definimos $W_1 := \langle v_1^{(1)}, \dots, v_1^{(k)} \rangle$ y $M : W_1 \longrightarrow \mathbb{F}^n$, $v_1^{(i)} \longrightarrow v_2^{(i)}$

y por otro lado sabemos que $d_j = (0, v^{(j)})$

$\Rightarrow V_0 = \langle d_1, \dots d_t \rangle$ y por tanto $V_0 + V_1 = V$.

Ej 9

$f_1, f_2, f_3 : Z \longrightarrow \{|z| \le 1\}$ y queremos estimar $\mathbb{E}_{x_1, x_2} f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_1 + x_2)$ en función de $\|f_i\|_{U^2}$

Dem.- Hacer inversión de Fourier y escribir

$$f_1(x_1) = \sum_{\xi} \hat{f}_1(\xi) e(x_1 \cdot \xi), \quad f_2 = \dots, \quad f_3 = \dots$$

$$\mathbb{E}_{x_1, x_2} \sum_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} \hat{f}_1(\xi_1) \hat{f}_2(\xi_2) \hat{f}_3(\xi_3) e(x_1 \cdot \xi_1 + x_2 \cdot \xi_2 + (x_1 + x_2) \cdot \xi_3)$$

$$= \sum_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} \hat{f}(\xi_1) \hat{f}_2(\xi_2) \hat{f}_3(\xi_3) \mathbb{E}_{x_1, x_2} e(x_1 \cdot (\xi_1 + \xi_3)) e(x_2 \cdot (\xi_2 + \xi_3))$$

$\mathbb{E}_x e(x\cdot(\xi_1+\xi_3)) = \mathbb{1}_{\{\xi_1=-\xi_3\}}$ y de la misma forma tenemos

$$\mathbb{E}_{x_1,x_2} f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_1+x_2) = \sum_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} \hat{f}_1(\xi_1)\hat{f}_2(\xi_2)\hat{f}_3(\xi_3)\mathbb{1}_{\{\xi_1=-\xi_3\}} \mathbb{1}_{\{\xi_2=-\xi_3\}}$$

$$= \sum_{\xi} \underbrace{\hat{f}_1(\xi)} \hat{f}_2(\xi)\hat{f}_3(-\xi)$$

$$\leq \|f_1\|_{U^2} \sum_{\xi} |\hat{f}_2(\xi)||\hat{f}_3(-\xi)| \leq \|f_1\|_{U^2} \left(\sum |\hat{f}_2(\xi)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum |\hat{f}_3(-\xi)|^2\right)^{1/2}$$

$$= \|f_1\|_{U^2}\cdot\|f_2\|_{L^2}\cdot\|f_3\|_{L^2} \underset{|f_2|,|f_3|\leq 1}{\leq} \|f_1\|_{U^2}$$

<u>Ej 10</u>

$M: V \to V$ y queremos ver que $\exists x\neq 0$ tal que $Mx\cdot x=0$ donde V es $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión $n\geq 3$ y $|\mathbb{F}|\geq 3$. M autoadjunta.

<u>Dem</u>

Observación: Si M NO biyectiva, sea $x\in \ker M\setminus\{0\}$ y fin.

$\Rightarrow M$ puede tomarse biyectiva.

Queremos ver que $\forall t\neq 0$

$$\left|\mathbb{E}_{x\in V} e(tMx\cdot x)\right|^2 \underbrace{= |\mathbb{F}|^{-n}}.$$ Para ver esto

$$= \mathbb{E}_{x,y\in V} e(tMx\cdot x - tMy\cdot y)$$ y hacemos el cambio

$x \longmapsto x+y$

$$= \mathbb{E}_{x,y} e(t\underline{M}(x+\underline{y})\cdot(x+\underline{y}) - tMy\cdot y) = \mathbb{E}_{x,y} e(t(Mx\cdot x + 2Mx\cdot y))$$

$$= \mathbb{E}_x e(t M_x \cdot x) \underbrace{\mathbb{E}_y \big(2t \underbrace{M_x \cdot y}\big)}_{= \mathbb{1}_{\{2tM_x = 0\}} = \mathbb{1}_{\{x=0\}}} = \mathbb{E}_y e(tM_x \cdot x) \mathbb{1}_{\{x=0\}}$$

$|\mathbb{F}|$ impar

$t \neq 0$ y M biyectiva

$$= \frac{1}{|V|} = \frac{1}{\underbrace{|\mathbb{F}|^n}}$$

Segunda parte:

$$\mathbb{E}_{x \in V} \mathbb{E}_{t \in \mathbb{F}} e(t \underbrace{M_x \cdot x}) = \mathbb{E}_{x \in V} \mathbb{1}_{\{M_x \cdot x = 0\}} =$$

$$= P(M_x \cdot x = 0).$$

$$\underline{P(M_x \cdot x = 0)} = \mathbb{E}_{t \in \mathbb{F}} \mathbb{E}_{x \in V} e(t M_x \cdot x)$$

dividimos esta suma entre $t=0$ y $t \neq 0$

$$\underbrace{\geq \frac{1}{|\mathbb{F}|}\left(1 - \frac{|\mathbb{F}|-1}{|\mathbb{F}|^{n/2}}\right) > \frac{1}{|\mathbb{F}|^n}}$$ hemos acabado.

$\leftarrow$ se prueba que si $|\mathbb{F}| \geq 3$ y $n \geq 3$ esa desigualdad se cumple.

Ej 11

Vamos a probar la pista:

Queremos ver que si $U^\perp := \{y \in V : \forall x \in U \ Mx \cdot y = 0\}$ entonces $\dim U^\perp < 3 + \dim U$.

Definimos $\langle , \rangle : U^\perp/U \times U^\perp/U \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$(x+U, y+U) \longrightarrow \underline{Mx \cdot y}.$$

Bien def.

$\langle u_1 + x, u_2 + y \rangle = M(x+u_1)\cdot(y+u_2)$

donde $u_1, u_2 \in U$

$$= Mx\cdot y + \underbrace{\cancel{Mx\cdot u_2}}_{0} + \underbrace{\cancel{Mu_1\cdot y}}_{0} + \underbrace{\cancel{Mu_1\cdot u_2}}_{0}$$

ya que $y \in U^\perp$ y $u_1 \in U$ — ya que $u_1, u_2 \in U$

$= \langle x, y \rangle$

Sea $T : U^\perp/U \longrightarrow U^\perp/U$ la identidad.

Aplicamos el ejercicio 10 a $U^\perp/U$, el homomorfismo $T = id$ y tenemos que si $\dim U^\perp \geq \dim U + 3$ entonces existiría $\bar{x} \in U^\perp/U$ no nulo

$\Rightarrow x \notin U$ tal que $\langle x, x \rangle = 0$

$\Rightarrow Mx\cdot x = 0$ y podríamos añadir x al conjunto U, y U no sería maximal.

Demostración del ejercicio 11:

Tenemos que $\dim U^\perp < 3 + \dim U$.

Supongamos por contradicción que $\dim U < \frac{1}{2}\dim V - \frac{3}{2}$

Tenemos la desigualdad:

$$\dim V = \dim(\underline{MU}) + \dim \underline{U^\perp} \leq \dim U + \dim U^\perp$$

$$\dim U < \frac{1}{2}\left(\dim U + \dim U^\perp\right) - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \dim U < \dim U^\perp - 3 \leq \dim U + 3 - 3 = \dim U$$

usando la Pista (lo de antes)

$$\Rightarrow \quad \dim U < \dim U \ !! \quad \text{contradicción}$$