Teorema del Cono (continuado)

19/8/2021

AGRA IV

Blow-up (Construcción 1.2)

$p \in \mathbb{P}^2_k$ ← coordenadas $[x,y,z]$

$p = [0,0,1]$

$$X = Bl_p\, \mathbb{P}^2_k := \{([x,y,z],[u,v]) \in \mathbb{P}^2_k \times \mathbb{P}^1_k : xv - yu = 0\}$$

Propiedades $\quad \pi : X \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}^2_k$

(1) $E := \pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1_k$ (divisor excepcional)

(2) $X \setminus E \simeq \mathbb{P}^2 \setminus \{p\}$

(3) $E^2 = -1$ (Ejemplo 1.3) y $K_X = -3L + E$

$L = \pi^{-1}(\ell)$, ℓ recta que no pasa por p

$$\Rightarrow E \cdot K_X = E \cdot (-3L + E) = 0 - 1 = -1$$

Definición: $C \subseteq X$ tal que $C^2 = C \cdot K_X = -1$ se llama una (-1)-curva.

(C: curva geom. íntegra; X: sup tórica $/k$)

Recordemos: X sup. tórica

$$N_1(X)_{\mathbb{R}} \simeq N^1(X)_{\mathbb{R}} := (\mathrm{Div}\, X / \mathbb{R}) / \text{equivalencia numérica}.$$

($N_1(X)_{\mathbb{R}}$: curvas)

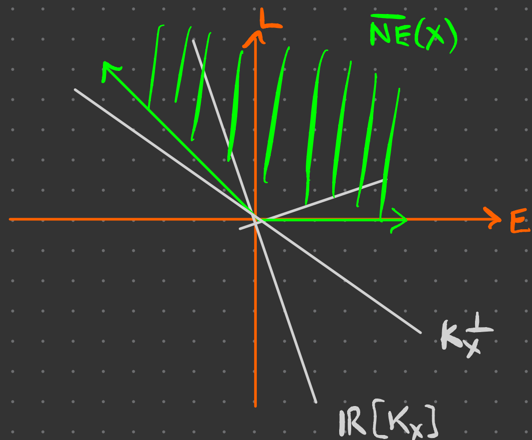
Si $X = Bl_p\, \mathbb{P}^2$ entonces $N_1(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathrm{Pic}\, X \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ generado por L, E

$\overline{NE}(X)$ = cono cerrado de curvas de $X \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$

$\uparrow \underbrace{\text{generado por } \quad E,\ L-E}$

Ejemplos 4.14 y 4.15

$$= \mathbb{R}_{\geq 0}[E] + \mathbb{R}_{\geq 0}[L-E]$$



$N_1(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$

$K_X = -3L + E$

$E \cdot K_X = -1 \qquad (L-E)\cdot K_X = (L-E)(-3L+E) = -3+1 = -2$

$0 < C\cdot(-K_X) \leq 3 \qquad C = E,\ L-E$

Teorema del Cono: X variedad tuanis $/k$

Existe una familia numerable de curvas íntegras $\{R_i\}_{i\in I}$ tales que

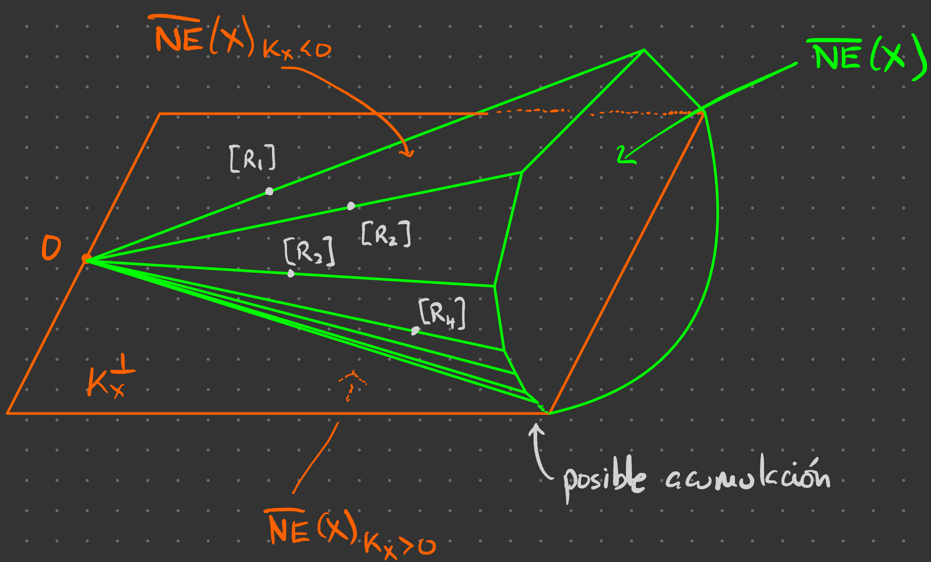
$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X\geq 0} + \sum_{i\in I} \mathbb{R}_{\geq 0}[R_i].$$

Los rayos $\{\mathbb{R}_{\geq 0}[R_i]\}$ sólo se acumulan en el hiperplano $K_X^{\perp}$.

Además: (1) Cada rayo $\mathbb{R}_{\geq 0}[R_i]$ es extremal

(2) Si $C \subset R_i$ es un componente geométricamente íntegro

entonces $0 < -K_X \cdot C \leq \dim X + 1$



Rayos Extremales en superficies.

X sup tórica $/ k$ ← cualquiera.

$R :=$ rayo extremal del $\overline{NE}(X)_{K_X<0}$

Tricotomía: $R^2>0$, $R^2=0$, $R^2<0$.

$R^2>0$

Proposición: (Lema 6.8) $C \subseteq X$ una curva tal que $\mathbb{R}_{\geq 0}[C] \subseteq \overline{NE}(X)$ es un rayo extremal tal que $C^2>0$, entonces

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}} N_1(X)_{\mathbb{R}}}_{\rho(X) \text{ número de Picard.}} = 1$$

Demostración: Sea $\mathbb{R}_{\geq 0}[C'] \subseteq \overline{NE}(X)$ un rayo cualquiera.

Aserción: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot C - C'$ es un divisor effectivo.

De ser el caso: $C' + (nC - C') = nC$ ← en el rayo extremal $\mathbb{R}_{\geq 0}[C]$

$\Rightarrow C' \in \mathbb{R}_{\geq 0}[C] \Rightarrow \overline{NE}(X)$ tiene sólo un rayo extremal

$N_1(X)_{\mathbb{R}}$ está generado por elementos de $\overline{NE}(X)$

$\Rightarrow \rho(X) = 1.$

Prueba de la aserción:

Idea: $D \in \operatorname{Div} X$ es effectivo $\Leftrightarrow \dim \underbrace{\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))}_{h^0(X,\mathcal{O}_X(D))} > 0$

Riemann-Roch

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(nC - C')) \overset{\downarrow}{=} \frac{(nC-C')(nC-C'-K_X)}{2} + \chi(X, \mathcal{O}_X)$$

$$= \frac{C^2}{2} \cdot n^2 + \text{ un polinomio en } n \text{ de grado} \leq 1$$

$C^2 > 0 \Rightarrow$ si $n \gg 0$ entonces $\underbrace{\chi(X, \mathcal{O}_X(nC - C'))}_{\chi} > 0$

Por otro lado

$$\chi \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(nC-C')) + \underbrace{h^2(X, \mathcal{O}_X(nC-C'))}_{\substack{\| \\ h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - nC + C'))}}$$

dualidad de Serre. $\longrightarrow$

Sea $A \in X$ un divisor amplio ($\Rightarrow A \cdot D > 0$ para toda curva $D \subset X$)

Entonces: $A \cdot (K_X - nC + C') = A \cdot K_X - n\underbrace{A \cdot C}_{>0} + A \cdot C'$

$\Rightarrow$ si $n \gg 0$ entonces $A \cdot (K_X - nC + C') < 0$

$\Rightarrow$ $K_X - nC + C'$ no es effectivo $\Rightarrow h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - nC + C')) = 0$

$\Rightarrow \quad h^0(X, \mathcal{O}_X(nC - C')) \geq \chi > 0$ si $n \gg 0$.

$\Rightarrow \quad nC - C'$ es effectivo $\quad \square$ aserción.

$R^2 = 0$:

Proposición: (Lema 6.8) Si $\chi(X, \mathcal{O}_X) \geq 1$; $D \subset X$ curva íntegra con $D^2 = 0$ y $D \cdot K_X < 0$ entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} \varphi_{|D|} : X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{P}^N \\ & C \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

con C una curva tórica y para $p \in C(\bar{k})$ general tenemos que $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ $\quad \square$

$C \in |D| \qquad |D| \longleftrightarrow \dfrac{H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}}{\bar{k}^*}$

$C \sim D$ y C effectivo