El Teorema de Ishovskikh-Manin

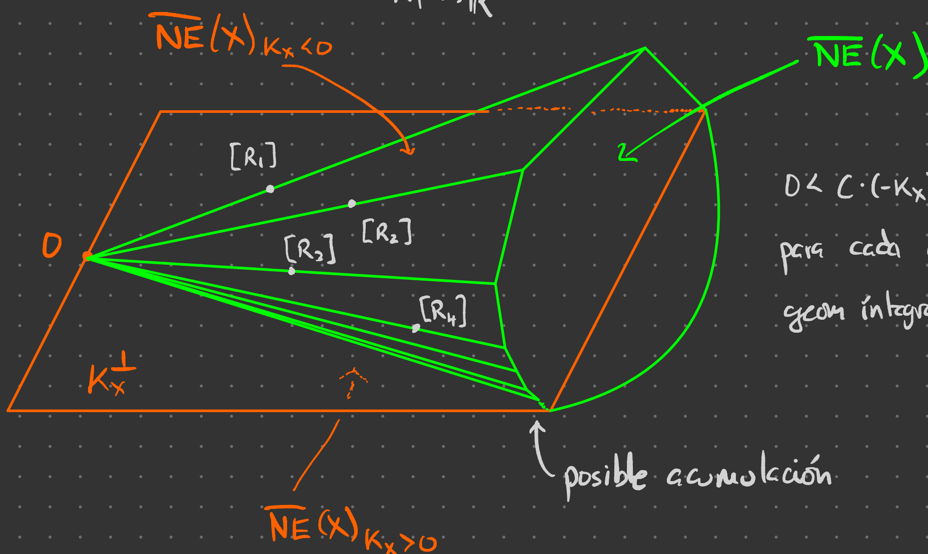
20/8/21

AGRA IV

Repaso: Teorema del cono y consecuencias para superficies.

X/k variedad fuanis. $\overline{NE}(X)$ = cono cerrado de curvas en X

$$\overline{NE}(X) \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)}$$



$0 < C\cdot(-K_X) \leq \dim X + 1$ para cada curva geom íntegra $C \subseteq R_i$

Tricotomía: $R_i^2 > 0$, $R_i^2 = 0$, $R_i^2 < 0$.

X superficie fuanis $/k$

- Si $\overline{NE}(X)$ posee un rayo extremal con $R_i^2 > 0$ entonces $\underbrace{\rho(X) = 1}$ $N_1(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$.
- Si $\chi(X, \mathcal{O}_X) \geq 1$, $D \subseteq X$ curva íntegra con $D^2 = 0$, $D\cdot K_X < 0$

entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_{|D|}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}^N \\ & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

curva fuanis; para $p \in C(\bar{k})$ general, $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$.

$R^2 < 0$

Proposición: Si $R = \mathbb{R}_{\geq 0}[C] \subseteq \overline{NE}(X)_{K_X < 0}$ satisface $C^2 < 0$
(Lema 6.9)

íntegra

entonces $\exists$ $\pi_C : X \longrightarrow Y$

superficie normal (!)

y para $D \subset X$ una curva, $\pi_C(D) = pt \Leftrightarrow D = nC$.

Idea: (1) Los componentes geométricamente íntegros de C son (-1)-curvas (geometría convexa de $\overline{NE}(X)$)

$C \cdot K_X = C^2 = -1$

(2) Los componentes geométricamente íntegros de C son disjuntos dos a dos

Utiliza acción del $Gal(\bar{k}/k)$ sobre los componentes de C y el hecho de que esta acción conserva la forma de intersección.

(3) Los componentes geométricamente íntegros de C se pueden contraer simultáneamente $/ k$

Utiliza la acción del $Gal(\bar{k}/k)$ y la contractabilidad de Castelnuovo de (-1)-curvas $/ k = \bar{k}$.

Superficies racionales. X superficie tersnis $/k$

X es racional si

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar{k}} & \overset{\sim}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2_{\bar{k}} \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ U & \xrightarrow{\ \simeq_{\bar{k}}\ } & V \end{array}$$

abiertos de Zariski

Teorema (Iskovskikh–Manin) [1979, 1966]: X superficie tersnis$/k$ racional

$\exists$ superficie tersnis Y/k y un morfismo biracional $\pi: X \longrightarrow Y/k$

tales que (1) Y es una superficie de del Pezzo ($-K_Y$ es amplio) ó

(2) Y es un fibrado en cónicas sobre una cónica

$\exists\ \pi: Y \longrightarrow C$

$C_{\bar{k}} \simeq \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$

y si $p \in C(\bar{k})$ es general entonces $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$

Idea brillante de Mori: para clasificar variedades debemos entender cuánta positividad posee K_X

Definición: X sup tersnis$/k$ $N \subset X$ un divisor es **nef** si $\forall\ C \subset X$ curva vale $N \cdot C \geq 0$.

(ejemplo: divisores amplios son nef)

Si K_X es nef, decimos que X es un **modelo minimal**.

Proposición: X sup tueuis $/k$ racional. Entonces K_X <u>no</u> es nef.
(Corolario 6.4)

$\Rightarrow \exists\ C \subset X$ curva tal que $K_X \cdot C < 0$

$\Rightarrow$ existen rayos extremales en $\overline{NE}(X)_{K_X<0}$.

Sin pérdida de generalidad, un tal rayo está generado por una curva íntegra (Proposición 4.9) D

3 casos:

(1) $D^2 > 0$ Ayer: $\overbrace{\dim_{\mathbb{R}} N_1(X)_{\mathbb{R}}}^{\rho(X)} = 1$

$\Rightarrow$ todo divisor de X/k es un múltiplo de un divisor amplio. $\Rightarrow$ $\underline{K_X}$ or $-K_X$ es amplio

imposible porque amplio $\Rightarrow$ nef y X es racional

$\Rightarrow -K_X$ es amplio, o sea X es del Pezzo

(2) $D^2 = 0$ Si X es racional

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \underbrace{h^0(X, \mathcal{O}_X)}_{1} - \cancelto{0}{h^1(X, \mathcal{O}_X)} + \cancelto{0}{h^2(X, \mathcal{O}_X)} = 1$$

$\Rightarrow \exists\ \pi : X \to C$ fibración en cónicas.

Falta $C_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$. Asumimos que $k = \bar{k}$

X racional $\Rightarrow$ $\underbrace{\sigma : \mathbb{P}^2 \overset{\sim}{\dashrightarrow} X \xrightarrow{\pi} C}_{\text{dominante.}}$

$\ell \subseteq \mathbb{P}^2$ recta $\qquad \pi \circ \sigma|_\ell : \ell \dashrightarrow C$ mapa racional dominante

$$0 = g(\ell) \geq g(C) \Rightarrow g(C) = 0.$$

(3) $D^2 < 0$ $\quad \exists \; \pi_D : X \longrightarrow Y$ contracción

$\quad Y$ ← tiene más

$C \subseteq X$ curva. $\quad \pi_D(C) = pt \Leftrightarrow C = nD.$

Notamos: $\rho(Y) < \rho(X)$

Repetimos el paso (3) hasta llegar al caso (1) or (2)

D Ishovskikh-Manin.

Deuda:

Proposición: X sup. tranquila / k racional. Entonces K_X no es nef.
(Corolario 6.4)

Ideas: (1) $h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X)) = 0$

- Podemos asumir que $k = \bar{k}$
- $h^1(X, \mathcal{O}_X)$ y $h^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X))$ son invariantes biracionales
- $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6)) = 0.$

(2) K_X nef $\Rightarrow h^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \geq 1$ ($\Rightarrow -K_X$ effectivo)

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) + h^2(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \geq \chi(X, \mathcal{O}_X(-K_X))$$

$$= \frac{(-K_X)(-2K_X)}{2} + 1 = K_X^2 + 1$$

Riemann-Roch

Por otro lado $h^2(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X))$ (Serre)

$= 0$ por (1)

$\Rightarrow h^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \geq K_X^2 + 1$

K_X nef $\Rightarrow K_X^2 \geq 0$ (Lema 2.14)

$\Rightarrow h^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \geq 1$

(3) $-K_X \sim D$ D effectivo.

K_X nef

A amplio. $0 < A \cdot D = A(-K_X) \leq 0 \Rightarrow\Leftarrow.$

Programa de Modelos minimales para superficies (Matsuki, p. 41)

$k = \bar{k}$