Combinatória de superfícies quadriculadas e geometria de espaços de módulos

5.^{a} aula

Carlos Matheus

CNRS & École Polytechnique

20 de agosto de 2021

Sumário

Número mín. de quadrados de origamis em $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_\sigma)$

Um origami $\mathcal{O}$ no estrato $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_\sigma)$ possui ao menos $k_1 + \dots + k_\sigma + \sigma$ quadrados.

Número mín. de quadrados de origamis em $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$

Um origami $\mathcal{O}$ no estrato $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ possui ao menos $k_1+\dots+k_\sigma+\sigma$ quadrados. De fato, se $\mathcal{O}$ é definido por $h,v\in S_n$, então $[h,v]\in S_n$ possui ciclos não triviais de tamanhos k_1+1, ..., $k_\sigma+1$ e, *a fortiori*, $n\geq(k_1+1)+\dots+(k_\sigma+1)$.

Número mín. de quadrados de origamis em $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$

Um origami $\mathcal{O}$ no estrato $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ possui ao menos $k_1+\dots+k_\sigma+\sigma$ quadrados. De fato, se $\mathcal{O}$ é definido por $h,v\in S_n$, então $[h,v]\in S_n$ possui ciclos não triviais de tamanhos k_1+1, …, $k_\sigma+1$ e, *a fortiori*, $n\geq(k_1+1)+\dots+(k_\sigma+1)$.

Além disso $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ sempre contém um origami com $N=k_1+\dots+k_\sigma+\sigma$ quadrados.

Número mín. de quadrados de origamis em $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$

Um origami $\mathcal{O}$ no estrato $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ possui ao menos $k_1+\dots+k_\sigma+\sigma$ quadrados. De fato, se $\mathcal{O}$ é definido por $h,v\in S_n$, então $[h,v]\in S_n$ possui ciclos não triviais de tamanhos k_1+1, …, $k_\sigma+1$ e, *a fortiori*, $n\geq(k_1+1)+\dots+(k_\sigma+1)$.

Além disso $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ sempre contém um origami com $N=k_1+\dots+k_\sigma+\sigma$ quadrados. Com efeito, seja $\mu\in S_N$ uma permutação com ciclos de tamanhos k_j+1. A permutação μ é par (pois $k_1+\dots+k_\sigma=2g-2$), de modo que um teorema de Gleason permite escrever μ como o produto de dois N-ciclos v e ρ.

Número mín. de quadrados de origamis em $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_\sigma)$

Um origami $\mathcal{O}$ no estrato $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_\sigma)$ possui ao menos $k_1 + \dots + k_\sigma + \sigma$ quadrados. De fato, se $\mathcal{O}$ é definido por $h, v \in S_n$, então $[h, v] \in S_n$ possui ciclos não triviais de tamanhos $k_1 + 1$, ..., $k_\sigma + 1$ e, *a fortiori*, $n \geq (k_1 + 1) + \dots + (k_\sigma + 1)$.

Além disso $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_\sigma)$ sempre contém um origami com $N = k_1 + \dots + k_\sigma + \sigma$ quadrados. Com efeito, seja $\mu \in S_N$ uma permutação com ciclos de tamanhos $k_j + 1$. A permutação μ é par (pois $k_1 + \dots + k_\sigma = 2g - 2$), de modo que um teorema de Gleason permite escrever μ como o produto de dois N-ciclos v e ρ.

Como quaisquer N-ciclos são conjugados, digamos $\rho = hv^{-1}h^{-1}$, isso significa que

$$\mu = v(hv^{-1}h^{-1}) = [h, v].$$

(Note que v e h agem transitivamente em $\{1, \dots, N\}$)

Teorema de Hubert–Lelièvre e McMullen

No caso de $\mathcal{H}(2)$, o origami em L com 3 quadrados é o menor possível e sua $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita já foi descrita em outra ocasião.

Teorema de Hubert–Lelièvre e McMullen

No caso de $\mathcal{H}(2)$, o origami em L com 3 quadrados é o menor possível e sua $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita já foi descrita em outra ocasião.

Em geral, a $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami em $\mathcal{H}(2)$ com $n \geq 4$ quadrados é descrita pelo seguinte teorema:

Teorema (Hubert–Lelièvre, McMullen (2005))

Os origamis (reduzidos) de $\mathcal{H}(2)$ com $n \geq 4$ quadrados formam uma *única* $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita contendo $\frac{3}{8}(n-2)n^2\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p^2})$ elementos quando n é par, e *duas* $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas contendo $\frac{3}{16}(n-1)n^2\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p^2})$ e $\frac{3}{16}(n-3)n^2\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p^2})$ elementos quando n é ímpar.

Monodromias de origamis (I)

As duas $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas podem ser distinguidas pela *monodromia do origami*, i.e., a classe de conj. do subgrupo $\langle h, v\rangle$ de S_n.

Monodromias de origamis (I)

As duas $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas podem ser distinguidas pela *monodromia do origami*, i.e., a classe de conj. do subgrupo $\langle h, v\rangle$ de S_n.

Com efeito, a monodromia de um origami é um invariante de sua $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita (pois $SL(2,\mathbb{Z})$ é gerado por dois elementos agindo por transformações de Nielsen).

Monodromias de origamis (I)

As duas $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas podem ser distinguidas pela *monodromia do origami*, i.e., a classe de conj. do subgrupo $\langle h, v\rangle$ de S_n.

Com efeito, a monodromia de um origami é um invariante de sua $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita (pois $SL(2,\mathbb{Z})$ é gerado por dois elementos agindo por transformações de Nielsen). Além disso, para cada $n \geq 5$ ímpar, existem *ao menos* duas $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis em $\mathcal{H}(2)$ com n quadrados porque $h = (1, 2, \dots, n)$ e $v_B = (1, 2, 3)$ tem monodromia A_n e h e $v_A = (1, 2)$ tem monodromia S_n.

Monodromias de origamis (I)

As duas $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas podem ser distinguidas pela *monodromia do origami*, i.e., a classe de conj. do subgrupo $\langle h, v\rangle$ de S_n.

Com efeito, a monodromia de um origami é um invariante de sua $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita (pois $SL(2,\mathbb{Z})$ é gerado por dois elementos agindo por transformações de Nielsen). Além disso, para cada $n \geq 5$ ímpar, existem *ao menos* duas $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis em $\mathcal{H}(2)$ com n quadrados porque $h = (1, 2, \dots, n)$ e $v_B = (1, 2, 3)$ tem monodromia A_n e h e $v_A = (1, 2)$ tem monodromia S_n.

Observação

O teorema de Hubert–Lelièvre e McMullen diz que a monodromia é um invariante *completo* para $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas em $\mathcal{H}(2)$. Quando $n \geq 5$ é ímpar, a $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita com monodromia S_n, resp. A_n, é dita de tipo A, resp. B.

Monodromias de origamis (II)

A monodr. G de um origami *primitivo*[1] $\mathcal{O}$ complicado é A_n ou S_n:

[1] I.e., o origami não é um recobrimento não-trivial de outro origami ou, equivalentemente, sua monodromia é um subgrupo primitivo de S_n.

Monodromias de origamis (II)

A monodr. G de um origami *primitivo*[1] $\mathcal{O}$ complicado é A_n ou S_n:

Teorema (Zmiaikou)

Se $\mathcal{O}$ em $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_\sigma)$ possui $n \geq 4(k_1 + \cdots + k_\sigma + \sigma)^2$ quadrados possui monodromia A_n ou S_n.

[1] I.e., o origami não é um recobrimento não-trivial de outro origami ou, equivalentemente, sua monodromia é um subgrupo primitivo de S_n.

Monodromias de origamis (II)

A monodr. G de um origami *primitivo*[1] $\mathcal{O}$ complicado é A_n ou S_n:

Teorema (Zmiaikou)

Se $\mathcal{O}$ em $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ possui $n \geq 4(k_1+\cdots+k_\sigma+\sigma)^2$ quadrados possui monodromia A_n ou S_n.

Prova

Segundo Babai e Pyber, um tal $G \neq A_n, S_n$ tem *grau mínimo*

$$\min_{\alpha\in G\setminus\{id\}} \#\{v\in\{1,2,\dots,n\} : \alpha(v)\neq v\}$$

maior que $\sqrt{n/4}$. Isso conclui a prova porque G possui um elemento $[h,v]$ com suporte de tamanho $k_1+\cdots+k_\sigma+\sigma$.

[1] I.e., o origami não é um recobrimento não-trivial de outro origami ou, equivalentemente, sua monodromia é um subgrupo primitivo de S_n.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (I)

Uma coleção maximal de geodésicas horizontais fechadas de um origami é dita *cilindro horizontal*.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (I)

Uma coleção maximal de geodésicas horizontais fechadas de um origami é dita *cilindro horizontal*. Os origamis são naturalmente decompostos em cilindros horizontais (os quais são reuniões de ciclos de h).

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (I)

Uma coleção maximal de geodésicas horizontais fechadas de um origami é dita *cilindro horizontal*. Os origamis são naturalmente decompostos em cilindros horizontais (os quais são reuniões de ciclos de h). Pode-se mostrar que um origami em $\mathcal{H}(2)$ possui 1 ou 2 cilindros horizontais,

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (I)

Uma coleção maximal de geodésicas horizontais fechadas de um origami é dita *cilindro horizontal*. Os origamis são naturalmente decompostos em cilindros horizontais (os quais são reuniões de ciclos de h). Pode-se mostrar que um origami em $\mathcal{H}(2)$ possui 1 ou 2 cilindros horizontais, de modo que ele é determinado por 4 parâmetros naturais (t, a, b, c), $0 \leq t < n$, $a + b + c = n$ ou 6 parâmetros naturais $(t_1, t_2, h_1, h_2, w_1, w_2)$, $0 \leq t_j < w_j$, $w_1 < w_2$, $n = h_1 w_1 + h_2 w_2$:

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (II)

Supondo que $n > 3$ é *primo*, Hubert e Lelièvre começam com um método de descida (usando os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$) para mostrar que qualquer origami com 2 cilindros está na $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami com 2 cilindros e altura total $h_1 + h_2 = 2$.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (II)

Supondo que $n > 3$ é *primo*, Hubert e Lelièvre começam com um método de descida (usando os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$) para mostrar que qualquer origami com 2 cilindros está na $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami com 2 cilindros e altura total $h_1 + h_2 = 2$.

Em seguida, quando altura total é 2, a co-primalidade entre w_1 e w_2 pode ser usada para obter $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$ após aplicarmos a transf. de Nielsen $(h, v) \mapsto (h, vh^{-1})$ um certo número de vezes.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (II)

Supondo que $n > 3$ é *primo*, Hubert e Lelièvre começam com um método de descida (usando os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$) para mostrar que qualquer origami com 2 cilindros está na $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami com 2 cilindros e altura total $h_1 + h_2 = 2$.

Em seguida, quando altura total é 2, a co-primalidade entre w_1 e w_2 pode ser usada para obter $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$ após aplicarmos a transf. de Nielsen $(h, v) \mapsto (h, vh^{-1})$ um certo número de vezes.

Olhando para a direção *vertical* (i.e., aplicando o elemento $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$) num origami com altural total 2 e $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, obtemos um origami com um *único* cilindro.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (II)

Supondo que $n > 3$ é *primo*, Hubert e Lelièvre começam com um método de descida (usando os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$) para mostrar que qualquer origami com 2 cilindros está na $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami com 2 cilindros e altura total $h_1 + h_2 = 2$.

Em seguida, quando altura total é 2, a co-primalidade entre w_1 e w_2 pode ser usada para obter $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$ após aplicarmos a transf. de Nielsen $(h, v) \mapsto (h, vh^{-1})$ um certo número de vezes.

Olhando para a direção *vertical* (i.e., aplicando o elemento $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$) num origami com altural total 2 e $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, obtemos um origami com um *único* cilindro.

Para resumir, todo origami em $\mathcal{H}(2)$ com um número $n > 3$ primo de quadrados está na $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami com 1 cilindro.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (III)

Para concluir a prova do teorema (no caso $n > 3$ primo), basta mostrar que origamis com 1 cilindro com mesma monodromia estão na mesma $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (III)

Para concluir a prova do teorema (no caso $n > 3$ primo), basta mostrar que origamis com 1 cilindro com mesma monodromia estão na mesma $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita.

O primeiro passo é mostrar que um origami com parâmetros (a,b,c) está na $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami com parâmetros $(1,d,e)$. Para isso, basta provar conectar (a,b,c) com $(\delta,k\delta,\gamma)$ onde $\delta \mid \mathrm{mdc}(a,b)$ (porque n primo diz que $\mathrm{mdc}(\delta,\gamma)=1$, de maneira que podemos repetir o argumento para obter o origami desejado com parâmetros $(1,d,e)$).

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (III)

Para concluir a prova do teorema (no caso $n > 3$ primo), basta mostrar que origamis com 1 cilindro com mesma monodromia estão na mesma $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita.

O primeiro passo é mostrar que um origami com parâmetros (a,b,c) está na $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita de um origami com parâmetros $(1,d,e)$. Para isso, basta provar conectar (a,b,c) com $(\delta,k\delta,\gamma)$ onde $\delta \mid \mathrm{mdc}(a,b)$ (porque n primo diz que $\mathrm{mdc}(\delta,\gamma)=1$, de maneira que podemos repetir o argumento para obter o origami desejado com parâmetros $(1,d,e)$).

Nesse sentido, note que (a,b,c) tem dois cilindros na direção vertical: um deles tem altura c e o outro tem twist t. Isto fornece um origami com parâmetros $(\delta,k\delta,\gamma)$ ao olharmos para a direção $(1+t,\ell)$, onde $\ell=\mathrm{mdc}(a,b)$ e $\delta=\mathrm{mdc}(1+t,\ell)$.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (IV)

Uma vez que reduzimos nossa tarefa ao estudo dos origamis com parâmetros $(1, d, e)$, a idéia é aplicar os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$ para conectar esses origamis com $(1, 1, n-2)$ ou $(1, 2, n-3)$ (dependendo se d, e são ímpares ou pares).

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (IV)

Uma vez que reduzimos nossa tarefa ao estudo dos origamis com parâmetros $(1, d, e)$, a idéia é aplicar os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$ para conectar esses origamis com $(1, 1, n-2)$ ou $(1, 2, n-3)$ (dependendo se d, e são ímpares ou pares).

Por exemplo, suponha que d, e são ímpares. A direção vertical de $(1, d, e)$ é um origami em L com comprimento $1 + e$ e altura total $1 + d$.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (IV)

Uma vez que reduzimos nossa tarefa ao estudo dos origamis com parâmetros $(1, d, e)$, a idéia é aplicar os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$ para conectar esses origamis com $(1, 1, n-2)$ ou $(1, 2, n-3)$ (dependendo se d, e são ímpares ou pares).

Por exemplo, suponha que d, e são ímpares. A direção vertical de $(1, d, e)$ é um origami em L com comprimento $1+e$ e altura total $1+d$. Aplicando $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e olhando para a direção vertical, obtemos um origami com 2 cilindros de alturas 1.

Idéia da prova de Hubert–Lelièvre (IV)

Uma vez que reduzimos nossa tarefa ao estudo dos origamis com parâmetros $(1, d, e)$, a idéia é aplicar os geradores de $SL(2,\mathbb{Z})$ para conectar esses origamis com $(1, 1, n-2)$ ou $(1, 2, n-3)$ (dependendo se d, e são ímpares ou pares).

Por exemplo, suponha que d, e são ímpares. A direção vertical de $(1, d, e)$ é um origami em L com comprimento $1+e$ e altura total $1+d$. Aplicando $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e olhando para a direção vertical, obtemos um origami com 2 cilindros de alturas 1. Usando a transf. de Nielsen $(h, v) \mapsto (h, vh^{-1})$ para fazer $t_1 = t_2 = 0$ e olhando para a direção diagonal $(1, 1)$, obtemos um origami com 1 cilindro e parâmetros $(1, 1, n-2)$.

Invariante HLK

No trabalho original de Hubert e Lelièvre, as $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas foram distinguidas por um invariante atualmente chamado HLK.

Invariante HLK

No trabalho original de Hubert e Lelièvre, as $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas foram distinguidas por um invariante atualmente chamado HLK.

Este invariante diz respeito às posições dos chamados *pontos de Weierstrass*.

Invariante HLK

No trabalho original de Hubert e Lelièvre, as $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas foram distinguidas por um invariante atualmente chamado HLK.

Este invariante diz respeito às posições dos chamados *pontos de Weierstrass*. Em termos simples, $\mathcal{O} \in \mathcal{H}(2)$ é *hiperelíptico*, i.e., $\mathcal{O}$ é um recobrimento ramificado de $\mathbb{T}^2$ admitindo um automorfismo ι com 6 pontos fixos levando a involução $\iota_0(z) = -z$ de $\mathbb{T}^2$.

Invariante HLK

No trabalho original de Hubert e Lelièvre, as $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas foram distinguidas por um invariante atualmente chamado HLK.

Este invariante diz respeito às posições dos chamados *pontos de Weierstrass*. Em termos simples, $\mathcal{O} \in \mathcal{H}(2)$ é *hiperelíptico*, i.e., $\mathcal{O}$ é um recobrimento ramificado de $\mathbb{T}^2$ admitindo um automorfismo ι com 6 pontos fixos levando a involução $\iota_0(z) = -z$ de $\mathbb{T}^2$.

Por definição, esses 6 pontos se projetam sobre os pontos de 2-torção de $\mathbb{T}^2$ e, portanto, podemos escrever uma lista $(l_0, [l_1, l_2, l_3])$ onde $l_0 = \#$ pontos fixos de ι sobre $0 \in \mathbb{T}^2$, l_1, l_2, l_3 $= \#$ pontos fixos de ι sobre $1/2$, $i/2$ e $(1+i)/2$.

Invariante HLK

No trabalho original de Hubert e Lelièvre, as $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas foram distinguidas por um invariante atualmente chamado HLK.

Este invariante diz respeito às posições dos chamados *pontos de Weierstrass*. Em termos simples, $\mathcal{O} \in \mathcal{H}(2)$ é *hiperelíptico*, i.e., $\mathcal{O}$ é um recobrimento ramificado de $\mathbb{T}^2$ admitindo um automorfismo ι com 6 pontos fixos levando a involução $\iota_0(z) = -z$ de $\mathbb{T}^2$.

Por definição, esses 6 pontos se projetam sobre os pontos de 2-torção de $\mathbb{T}^2$ e, portanto, podemos escrever uma lista $(l_0, [l_1, l_2, l_3])$ onde $l_0 = \#$ pontos fixos de ι sobre $0 \in \mathbb{T}^2$, l_1, l_2, l_3 $= \#$ pontos fixos de ι sobre $1/2$, $i/2$ e $(1+i)/2$.

Como $SL(2,\mathbb{Z})$ fixa a origem e permuta os outros pontos de 2-torção de $\mathbb{T}^2$, a lista $(l_0, [l_1, l_2, l_3])$ é um invariante (HKL) da $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita quando $[l_1, l_2, l_3]$ é pensado módulo permutação.

Valores do invariante HKL em $\mathcal{H}(2)$

Um cálculo rápido mostra que os valores possíveis do invariante HKL em $\mathcal{H}(2)$ são $(1, [3, 1, 1])$ e $(3, [1, 1, 1])$:

Conjectura de Delecroix–Lelièvre

A classificação das $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis (primitivos) não é conhecida em nenhum outro estrato.

Conjectura de Delecroix–Lelièvre

A classificação das $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis (primitivos) não é conhecida em nenhum outro estrato. Por outro lado, temos conjecturas sobre tais classificações graças aos experimentos númericos por vários autores incluíndo Delecroix e Lelièvre.

Conjectura de Delecroix–Lelièvre

A classificação das $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis (primitivos) não é conhecida em nenhum outro estrato. Por outro lado, temos conjecturas sobre tais classificações graças aos experimentos númericos por vários autores incluíndo Delecroix e Lelièvre.

Por exemplo, eles conjecturaram que as monodromias dos origamis e os valores do invariante HKL (se existem "anti-automorfismos") formam um invariante *completo* para as curvas de Teichmüller aritméticas para vários estratos incluíndo $\mathcal{H}(1,1)$ e $\mathcal{H}(4)$.

Conjectura de Delecroix–Lelièvre

A classificação das $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis (primitivos) não é conhecida em nenhum outro estrato. Por outro lado, temos conjecturas sobre tais classificações graças aos experimentos númericos por vários autores incluíndo Delecroix e Lelièvre.

Por exemplo, eles conjecturaram que as monodromias dos origamis e os valores do invariante HKL (se existem "anti-automorfismos") formam um invariante *completo* para as curvas de Teichmüller aritméticas para vários estratos incluíndo $\mathcal{H}(1,1)$ e $\mathcal{H}(4)$.

No caso de $\mathcal{H}(1,1)$, isso significa que temos duas $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas quando o número de quadrados é $n > 6$. Já no contexto de $\mathcal{H}(4)$, isso quer dizer que temos 7 $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas quando $n > 8$ é ímpar, e 6 ou 7 $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas quando $n > 8$ é 0 ou 2 mod. 4.

Versão combinatória

McMullen conjecturou que a família de grafos obtida das $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis em $\mathcal{H}(2)$ usando os origamis como vértices e os geradores (e.g., parabólicos) de $SL(2,\mathbb{Z})$ para construir as arestas é *expansora* (i.e., as matrizes de adjacência correspondentes possuem um buraco espectral uniforme).

Versão combinatória

McMullen conjecturou que a família de grafos obtida das $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis em $\mathcal{H}(2)$ usando os origamis como vértices e os geradores (e.g., parabólicos) de $SL(2,\mathbb{Z})$ para construir as arestas é *expansora* (i.e., as matrizes de adjacência correspondentes possuem um buraco espectral uniforme).

Essa conjectura está em aberto apesar das evidências numéricas (e.g., o grafo da $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita dos origamis em $\mathcal{H}(2)$ com $n = 66$ quadrados possui 69120 vértices e diâmetro $23 \approx 2\log(69120)$).

Versão combinatória

McMullen conjecturou que a família de grafos obtida das $SL(2,\mathbb{Z})$-órbitas de origamis em $\mathcal{H}(2)$ usando os origamis como vértices e os geradores (e.g., parabólicos) de $SL(2,\mathbb{Z})$ para construir as arestas é *expansora* (i.e., as matrizes de adjacência correspondentes possuem um buraco espectral uniforme).

Essa conjectura está em aberto apesar das evidências numéricas (e.g., o grafo da $SL(2,\mathbb{Z})$-órbita dos origamis em $\mathcal{H}(2)$ com $n = 66$ quadrados possui 69120 vértices e diâmetro $23 \approx 2\log(69120)$).

Observação

A conjectura de McMullen possui uma versão geométrica (acerca da uniformidade do buraco espectral do Laplaciano das curvas de Teichmüller aritméticas em $\mathcal{H}(2)$).