Superficies cuadriculadas IV
Conteo de origamis : quasimodularity según Eskin–Okounkov

Vincent Delecroix

CNRS - Université de Bordeaux

AGRA IV, 19/08/2021

El teorema de Eskin–Okounkov

Teorema

Por cada estrata $\mathcal{H}_g(\kappa)$ la función generadora de los origamis $\sum \frac{1}{\mathrm{Aut}(o)} q^{\mathrm{Area}(o)}$ es una forma quasimodular.

El caso particular de $\mathcal{H}_g(1^{2g-2})$ fue hecho por Dijkgraaf.

El teorema de Eskin–Okounkov

Teorema

Por cada estrata $\mathcal{H}_g(\kappa)$ la función generadora de los origamis $\sum \frac{1}{\mathrm{Aut}(o)} q^{\mathrm{Area}(o)}$ es una forma quasimodular.

El caso particular de $\mathcal{H}_g(1^{2g-2})$ fue hecho por Dijkgraaf.

El comportamiento asíntotico de $\mathrm{Vol}\{M \in \mathcal{H}_g(\kappa) : \mathrm{Area}(M) \leq 1\}$ por $g \to \infty$ fue solucionado recientemente : conjetura de Eskin–Zorich probado en los años 2018-2020 por combinaciones de Aggarwal, Chen, Möller, Sauvaget, Zagier.

Forma modular y quasimodular

Definimos por $k \geq 1$

$$E_{2k}(q) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n \geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

y algebras de *formas modulares* y *formas quasimodulares* por $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

$$M_* := \mathbb{Q}[E_4, E_6] \subset \widetilde{M}_* := \mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6].$$

Forma modular y quasimodular

Definimos por $k \geq 1$

$$E_{2k}(q) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n \geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

y algebras de *formas modulares* y *formas quasimodulares* por $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

$$M_* := \mathbb{Q}[E_4, E_6] \subset \widetilde{M}_* := \mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6].$$

Teorema

Las algebras M_* y $\widetilde{M}_*$ son libres (isomorfas a algebras de polinomios). Además, cada E_{2k}, $k \geq 2$ pertenecen a M_* y es homogéneo de grado $2k$ cuando definimos $\deg(E_2) = 2$, $\deg(E_4) = 4$ *y* $\deg(E_6) = E_6$.

Forma modular y quasimodular

Definimos por $k \geq 1$

$$E_{2k}(q) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n \geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

y algebras de *formas modulares* y *formas quasimodulares* por $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

$$M_* := \mathbb{Q}[E_4, E_6] \subset \widetilde{M}_* := \mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6].$$

Teorema

Las algebras M_* y $\widetilde{M}_*$ son libres (isomorfas a algebras de polinomios). Además, cada E_{2k}, $k \geq 2$ pertenecen a M_* y es homogéneo de grado $2k$ cuando definimos $\deg(E_2) = 2$, $\deg(E_4) = 4$ *y* $\deg(E_6) = E_6$.

Ejercicio: Exprimir E_8, E_{10} y E_{12} como polinomios en E_4 y E_6.

Asintótica de formas quasimodulares

Sea $\mathrm{Ev} : \widetilde{M} \to \mathbb{Q}[X]$ el homomorfismo de algebra definido por

$$\mathrm{Ev}(E_2) = X^2 + 12, \quad \mathrm{Ev}(E_4) = X^4, \quad \mathrm{Ev}(E_6) = X^6.$$

Asintótica de formas quasimodulares

Sea $\mathrm{Ev} : \widetilde{M} \to \mathbb{Q}[X]$ el homomorfismo de algebra definido por

$$\mathrm{Ev}(E_2) = X^2 + 12, \quad \mathrm{Ev}(E_4) = X^4, \quad \mathrm{Ev}(E_6) = X^6.$$

Definimos por $f \in \widetilde{M}_{2k}$, $\mathrm{ev}(f) := \mathrm{Ev}(f)\left(X = \frac{2\pi i}{h}\right)$.

Asintótica de formas quasimodulares

Sea $\mathrm{Ev} : \widetilde{M} \to \mathbb{Q}[X]$ el homomorfismo de algebra definido por

$$\mathrm{Ev}(E_2) = X^2 + 12, \quad \mathrm{Ev}(E_4) = X^4, \quad \mathrm{Ev}(E_6) = X^6.$$

Definimos por $f \in \widetilde{M}_{2k}$, $\mathrm{ev}(f) := \mathrm{Ev}(f)\left(X = \frac{2\pi i}{h}\right)$.

Teorema (Chen-Möller-Zagier)

Si $f(q) = \sum_N a_N q^N \in \widetilde{M}_{2k}$ y $\mathrm{ev}(f) = A \cdot h^{-p} + O(h^{1-p})$, entonces

$$\sum_{1 \leq N' \leq N} a_{N'} = A \cdot \frac{N^p}{p!} + O(N^{p-1} \log(N)).$$

Etapas de la preuba del teorema de Eskin–Okounkov

Teorema

Por cada estrata $\mathcal{H}_g(\kappa)$ la función generadora de los origamis $\sum \frac{1}{\mathrm{Aut}(o)} q^{\mathrm{Area}(o)}$ es una forma quasimodular.

Etapas de la preuba del teorema de Eskin–Okounkov

Teorema

Por cada estrata $\mathcal{H}_g(\kappa)$ la función generadora de los origamis $\sum \frac{1}{\mathrm{Aut}(o)} q^{\mathrm{Area}(o)}$ es una forma quasimodular.

1. reformular el conteo de origamis en termino de los carácteres del grupo simétrico (formula de Forbenius),
2. esa función de conteo es un polinomio shifted símetrico (Kerov–Olshanski),
3. el teorema de Bloch–Okounkov demuestra la quasimodularidad.

Conteo de origamis y grupo simétrico

Sea $\kappa = (k_1, k_2, \ldots, k_\sigma)$ con $k_1 + k_2 + \ldots + k_\sigma = 2g - 2$.
Sea C la clase de conjugación de S_N donde los ciclos tienen tamaños $k_1 + 1, k_2 + 1, \ldots, k_\sigma + 1$ y $N - \sum(k_i + 1)$ puntos fijos (definida por todo N).

Conteo de origamis y grupo simétrico

Sea $\kappa = (k_1, k_2, \ldots, k_\sigma)$ con $k_1 + k_2 + \ldots + k_\sigma = 2g - 2$.
Sea C la clase de conjugación de S_N donde los ciclos tienen tamaños $k_1 + 1, k_2 + 1, \ldots, k_\sigma + 1$ y $N - \sum(k_i + 1)$ puntos fijos (definida por todo N).

Entonces el número de origamis no necesariamente conexos con N cuadrados y singularidades conicas κ es igual a

$$\mathrm{Cov}_N(C) := \frac{1}{N!} \cdot \#\{(h, v) \in S_N \times S_N : [h, v] \in C\}.$$

Conteo de origamis y grupo simétrico

$$\mathrm{Cov}_N(C) := \frac{1}{N!} \cdot \#\{(h, v) \in S_N \times S_N : [h, v] = C\}$$

Denotemos $\mathrm{Cov}'_N(C)$ el conteo de los origamis donde cada componente es ramificada.

Conteo de origamis y grupo simétrico

$$\mathrm{Cov}_N(C) := \frac{1}{N!} \cdot \#\{(h,v) \in S_N \times S_N : [h,v] = C\}$$

Denotemos $\mathrm{Cov}'_N(C)$ el conteo de los origamis donde cada componente es ramificada.

Sea $\mathrm{Cov}(C) := \sum_N \mathrm{Cov}_N(C) q^N$ y $\mathrm{Cov}'(C) := \sum_N \mathrm{Cov}'_N(C) q^N$.

Conteo de origamis y grupo simétrico

$$\mathrm{Cov}_N(C) := \frac{1}{N!} \cdot \#\{(h,v) \in S_N \times S_N : [h,v] = C\}$$

Denotemos $\mathrm{Cov}'_N(C)$ el conteo de los origamis donde cada componente es ramificada.

Sea $\mathrm{Cov}(C) := \sum_N \mathrm{Cov}_N(C) q^N$ y $\mathrm{Cov}'(C) := \sum_N \mathrm{Cov}'_N(C) q^N$.

Lemma

Por cada C tenemos

$$\mathrm{Cov}'(C) = \frac{\mathrm{Cov}(C)}{\mathrm{Cov}()}$$

donde $\mathrm{Cov}() := \prod_N \frac{1}{1-q^N}$.

Conteo de origamis y grupo simétrico

$$\mathrm{Cov}_N(C) := \frac{1}{N!} \cdot \#\{(h, v) \in S_N \times S_N : [h, v] = C\}$$

Denotemos $\mathrm{Cov}'_N(C)$ el conteo de los origamis donde cada componente es ramificada.
Sea $\mathrm{Cov}(C) := \sum_N \mathrm{Cov}_N(C) q^N$ y $\mathrm{Cov}'(C) := \sum_N \mathrm{Cov}'_N(C) q^N$.

Lemma

Por cada C tenemos

$$\mathrm{Cov}'(C) = \frac{\mathrm{Cov}(C)}{\mathrm{Cov}()}$$

donde $\mathrm{Cov}() := \prod_N \frac{1}{1-q^N}$.

Ejercicio:

1. Prueben que $\#\{(h, v) \in S_N \times S_N : [h, v] = ()\} = N! \cdot \#\mathcal{P}_N$.
2. Prueben que $\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \prod_N \frac{1}{1-q^N}$.

Carácteres del grupo simétrico

Las classes de conjugaciones en S_N son en biyección con particiones $\mathcal{P}_N$ del entero N

$$(1,3)(2,4,5) \in S_5 \mapsto [3,2] \in \mathcal{P}_5$$

Una *función central* de S_N es una función $f : S_N \to \mathbb{C}$ que sea constante en los clases de conjugaciones. Se identifica naturalmente a una función $\mathcal{P}_N \to \mathbb{C}$ que también denotamos f.

Carácteres del grupo simétrico

Carácteres son las funciones centrales $\chi(s) = \mathrm{tr}(\rho(s))$ donde $\rho : S_N \to \mathrm{GL}(V)$. ρ (o χ) es *irreducible* si no exite una descomposición $V = V_1 \oplus V_2$ preservada por $\rho(S_N)$.

Carácteres del grupo simétrico

Carácteres son las funciones centrales $\chi(s) = \mathrm{tr}(\rho(s))$ donde $\rho : S_N \to \mathrm{GL}(V)$. ρ (o χ) es *irreducible* si no exite una descomposición $V = V_1 \oplus V_2$ preservada por $\rho(S_N)$.

Teorema (Schur)

1. *Los carácteres irreducibles forman una base ortonormal de las funciones centrales a respeto del producto hermitiano*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{s \in S_N} f(s)\overline{g(s)}.$$

Carácteres del grupo simétrico

Carácteres son las funciones centrales $\chi(s) = \mathrm{tr}(\rho(s))$ donde $\rho : S_N \to \mathrm{GL}(V)$. ρ (o χ) es *irreducible* si no exite una descomposición $V = V_1 \oplus V_2$ preservada por $\rho(S_N)$.

Teorema (Schur)

1. *Los carácteres irreducibles forman una base ortonormal de las funciones centrales a respeto del producto hermitiano*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{s \in S_N} f(s)\overline{g(s)}.$$

2. *Existe una biyección natural entre $\mathcal{P}_N$ y los carácteres irreducibles de S_N. El carácter irreducible associado a λ se denota χ^λ.*

Carácteres del grupo simétrico

Carácteres son las funciones centrales $\chi(s) = \mathrm{tr}(\rho(s))$ donde $\rho : S_N \to \mathrm{GL}(V)$. ρ (o χ) es *irreducible* si no exite una descomposición $V = V_1 \oplus V_2$ preservada por $\rho(S_N)$.

Teorema (Schur)

1. *Los carácteres irreducibles forman una base ortonormal de las funciones centrales a respeto del producto hermitiano*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{s \in S_N} f(s)\overline{g(s)}.$$

2. *Existe una biyección natural entre $\mathcal{P}_N$ y los carácteres irreducibles de S_N. El carácter irreducible associado a λ se denota χ^λ.*
3. *La representación estándar se descompone $\mathbb{C}^{S_N} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_N} (V^\lambda)^{\dim \lambda}$.*

Una definición de χ^λ (polinomio de Schur)

Sea $\lambda \in \mathcal{P}_N$. Definimos

$$s_\lambda = \sum_T x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_N} \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_N]$$

donde la suma es sobre las *tablas de Young semi estándar de forma* λ.

Una definición de χ^λ (polinomio de Schur)

Sea $\lambda \in \mathcal{P}_N$. Definimos

$$s_\lambda = \sum_T x_{t_1} x_{t_2} \ldots x_{t_N} \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N]$$

donde la suma es sobre las *tablas de Young semi estándar de forma* λ.

Teorema

$$s_\lambda = \sum_{\nu = (1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots) \in \mathcal{P}_N} \chi^\lambda(\nu) \prod_k \frac{(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_N^k)^{\nu_k}}{r_k! k^{r_k}}.$$

Una definición de χ^λ (polinomio de Schur)

Sea $\lambda \in \mathcal{P}_N$. Definimos

$$s_\lambda = \sum_T x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_N} \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_N]$$

donde la suma es sobre las *tablas de Young semi estándar de forma* λ.

Teorema

$$s_\lambda = \sum_{\nu=(1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots) \in \mathcal{P}_N} \chi^\lambda(\nu) \prod_k \frac{(x_1^k + x_2^k + \dots + x_N^k)^{\nu_k}}{r_k! k^{r_k}}.$$

Formula inductiva mas práctica: the Murnaghan-Nakayama rule.

Conteo de origamis y carácteres irreducibles

Recuérdense que

$$\mathrm{Cov}_N(C) := \frac{1}{N!} \cdot \#\{(h, v) \in S_N \times S_N : [h, v] = C\}$$

es el conteo de los origamis con N cuadrados, no necesariamente conexos, y singularidades conicas de angulos dadas por la clase de conjugación C.

Conteo de origamis y carácteres irreducibles

Recuérdense que

$$\mathrm{Cov}_N(C) := \frac{1}{N!} \cdot \#\{(h, v) \in S_N \times S_N : [h, v] = C\}$$

es el conteo de los origamis con N cuadrados, no necesariamente conexos, y singularidades conicas de angulos dadas por la clase de conjugación C.

Lemma (Frobenius formula)

Tenemos

$$\mathrm{Cov}_N(C) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_N} f_C(\lambda)$$

donde

$$f_C(\lambda) := \#C \cdot \frac{\chi^\lambda(C)}{\dim \lambda}.$$

Los teoremas de Kerov–Olshanski y Bloch–Okounkov

Una función $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ es *shifted simétrica* si es simetrica en las variables $\lambda_i - i$. Los ejemplos muy importantes son

$$p_k(\lambda) = (1 - 2^{-k})\zeta(-k) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[(\lambda_j - j + 1/2)^k - (-j + 1/2)^k \right].$$

Las funciónes shifted simétricas forman una $\mathbb{Q}$-algebra graduada que denotamos Λ^*.

Los teoremas de Kerov–Olshanski y Bloch–Okounkov

Teorema (Kerov–Olshanski)

For cada C, la función f_C pertenece a Λ^*. Además el grado de f_C es el número de puntos que no sean fijos por cualquiera permutación en C.

Teorema (Bloch–Okounkov)

Sea $f : \mathcal{P} \to \mathbb{Q}$ una función shifted simétrica. Entonces, su q-corchete

$$\langle f \rangle_q := \frac{\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} f(\lambda) q^{|\lambda|}}{\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|}}$$

es una función quasimodular.

Inducción de Chen-Möller-Sauvaget-Zagier y asintótica de los volumenes

Por el calculo de $\mathrm{Vol}\{M \in \mathcal{H}_g(\kappa) : \mathrm{Area}(M) \leq 1\}$, tenemos un método mucho mas práctico que el teorema de Bloch-Okounkov

- formulas explicitas por el caso $\mathcal{H}_g(2g-2)$ (Sauvaget),
- formulas inductivas por cualquiera otra $\mathcal{H}_g(\kappa)$ (Chen-Möller-Sauvaget-Zagier).