

Modelo Semiclásico del Amplificador en Fibra Óptica.

Erwin A. Martí-Panameño

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
México

San José, Costa Rica, 9 de Mayo, 2012



Plan de la Presentación

1 Introducción

- Particularidades de la física de láseres de F.O.

2 Interacción Radiación-Materia

- Modelo Semiclásico de interacción radiación materia
 - Operador de densidad
 - Hamiltoniano de Interacción

3 Ecuación de Onda (1D)

4 Conclusiones



Introducción

La invención y desarrollo de los láseres tiene un impacto imposible de evaluar, en toda su magnitud, en los cambios al desarrollo de la humanidad que han generado.



Introducción

La invención y desarrollo de los láseres tiene un impacto imposible de evaluar, en toda su magnitud, en los cambios al desarrollo de la humanidad que han generado. Los láseres cambiaron la forma de ver al mundo por ser una fuente de luz altamente coherente, de alta intensidad, baja difracción.....



Introducción

La invención y desarrollo de los láseres tiene un impacto imposible de evaluar, en toda su magnitud, en los cambios al desarrollo de la humanidad que han generado. Los láseres cambiaron la forma de ver al mundo por ser una fuente de luz altamente coherente, de alta intensidad, baja difracción..... pero no sólo.



Introducción

La invención y desarrollo de los láseres tiene un impacto imposible de evaluar, en toda su magnitud, en los cambios al desarrollo de la humanidad que han generado. Los láseres cambiaron la forma de ver al mundo por ser una fuente de luz altamente coherente, de alta intensidad, baja difracción..... pero no sólo. Dos aspectos a resaltar:



Introducción

La invención y desarrollo de los láseres tiene un impacto imposible de evaluar, en toda su magnitud, en los cambios al desarrollo de la humanidad que han generado. Los láseres cambiaron la forma de ver al mundo por ser una fuente de luz altamente coherente, de alta intensidad, baja difracción..... pero no sólo. Dos aspectos a resaltar:

- Interacción radiación-materia: Lineal y No lineal.

$$P = P[E]$$



Introducción

La invención y desarrollo de los láseres tiene un impacto imposible de evaluar, en toda su magnitud, en los cambios al desarrollo de la humanidad que han generado. Los láseres cambiaron la forma de ver al mundo por ser una fuente de luz altamente coherente, de alta intensidad, baja difracción..... pero no sólo. Dos aspectos a resaltar:

- Interacción radiación-materia: Lineal y No lineal.

$$P = P[E]$$

- Generación de pulsos luminosos de duraciones muy cortas.

$$\tau_0 \sim 10^{-12} - 10^{-15} \text{ s}$$



Las propiedades de los campos ópticos generados por láseres son empleados no sólo en física, sino también en biología, química, ciencia de materiales, etc. Así como en un sinnúmero de aplicaciones tecnológicas, entre las que resalataamos:



Las propiedades de los campos ópticos generados por láseres son empleados no sólo en física, sino también en biología, química, ciencia de materiales, etc. Así como en un sinnúmero de aplicaciones tecnológicas, entre las que resalataremos:

TELECOMUNICACIONES ÓPTICAS



Una posibilidad de acceder a la investigación en láseres y encontrar aplicaciones para éstos son los



Una posibilidad de acceder a la investigación en láseres y encontrar aplicaciones para éstos son los

LÁSERES EN FIBRAS ÓPTICAS CODOPADAS CON ELEMENTOS DE TIERRAS RARAS.



- A diferencia de la inmensa mayoría de láseres, en uno de fibra óptica el medio activo ocupa gran parte de la cavidad.
- Esto conlleva que diferentes fenómenos se desarrollen durante el laseo. Tanto lineales como no lineales.



- Por estas razones el modelo matemático de los LFO requiere de un cuidadoso desarrollo.
- En esta primera plática, de manera muy esquemática, vamos a obtener las ecuaciones de movimiento para un LFO, partiendo de principios fundamentales.



- El modelo que seguiremos está basado en el modelo semiclásico.
- En éste, la radiación electromagnética se considera clásica: a partir de las ecuaciones de Maxwell.



- El modelo que seguiremos está basado en el modelo semiclásico.
- En éste, la radiación electromagnética se considera clásica: a partir de las ecuaciones de Maxwell.
- El medio se considera cuantizado. Por lo que deberán emplearse técnicas de la Mecánica Cuántica para encontrar las ecuaciones de movimiento (polarización del medio y para la dinámica de poblaciones).



Operador de densidad

- Para el caso de un sistema cuántico, conformado por diferentes tipos de osciladores, el calor esperado de un operador A , viene dado por:

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \langle \Psi_n | A | \Psi_n \rangle$$

- $p_n = N_n / \sum_i N_i$. Los vectores de estado $|\Psi_n\rangle$ corresponden a los osciladores tipo n
- A partir de $|u_k\rangle$ - base del Hamiltoniano de reposo \mathcal{H}_0 , conocemos el operador unitario $I = \sum_k |u_k\rangle \langle u_k|$



Operador de densidad

- Introduciendo I en $\langle A \rangle$:

$$\langle A \rangle = \sum_{n,k} \rho_n \langle \Psi_n | A | u_k \rangle \langle u_k | \Psi_n \rangle \equiv \sum_k \langle u_k | \rho A | u_k \rangle$$

- Donde,

$$\rho \equiv \sum_n \rho_n | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n |,$$

es conocido como el operador de densidad.



Operador de densidad

- A partir de las expresiones para el operador ρ , es posible obtener $\langle A \rangle$ de manera muy simple:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$$

- Del curso de Mecánica Cuántica recordamos que los vectores de estado para la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo se expresan como la combinación lineal de las funciones propias del \mathcal{H}_0 :

$$|\psi_n \rangle = \sum_n c_{n,k} e^{-i\omega_k t} |u_k \rangle$$



Operador de densidad

- En base a lo anterior el operador de densidad puede expresarse como:

$$\rho = \sum_{n,k,l} \rho_n c_{n,k} c_{n,l}^* e^{-i(\omega_k - \omega_l)t} |u_k\rangle \langle u_l|.$$

- Lo que permite conocer los elementos matriciales de ρ :

$$\rho_{mj} = \langle u_m | \rho | u_j \rangle = \sum_n \rho_n c_{n,k} c_{n,j} e^{-i(\omega_m - \omega_j)t}.$$

- Poniendo $m = j$ encontramos la expresión para los elementos diagonales:

$$\rho_{jj} = \sum_n \rho_n |c_{n,j}|^2.$$



- $\langle \phi | \rho | \psi \rangle = \langle \psi | \rho | \phi \rangle^*$ – Hermítico
- $\text{Tr}(\rho) = 1$



Dependencia de ρ al tiempo

- Buscamos ecuaciones de movimiento para observables.
- A partir de la expresión para ρ en terminos de las funciones de estado, se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho]$$

- Donde \mathcal{H} es el hamiltoniano. No existe acotación respecto a la forma de éste, en particular:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

\mathcal{H}_1 – es un operador de interacción entre el medio y la perturbación.



Generalización del \mathcal{H}

- $\mathcal{H}_0|u_k \rangle = E_k|u_k \rangle$
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}' + \mathcal{H}^r$
 - \mathcal{H}' – representa la interacción del medio con el exterior.
 - \mathcal{H}^r – Hamiltoniano de relajación en ausencia de perturbaciones externas.
- Los elementos matriciales de ρ en el caso más general vendrán dados por:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} = (E_i - E_j)\rho_{ij} + [\mathcal{H}', \rho]_{ij} + [\mathcal{H}^r, \rho]_{ij}$$



Términos de relajamiento \mathcal{H}'

- Consideramos $\mathcal{H}' = 0$ – sistema aislado
- Intuitivamente podemos decir que la energía interna del sistema cuántico decaerá de manera natural (exponencial) debido a interacciones entre los osciladores y con el entorno del sistema.
- La fundamentación para el cálculo de los términos de relajamiento se da a partir del resultado Weisskopf y Wigner (*Z. Physik*, **63**, **54**, **1930**).



Elementos no Diagonales

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} = \hbar \omega_{ij} \rho_{ij} - \frac{i\hbar}{\tau_{ij}} \rho_{ij}$$

- $\omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar$
- τ_{ij} — el tiempo que tarde el sistema en $\rho_{ij} \rightarrow 0$ cuando $\mathcal{H}' = 0$
- ρ — Hermítico $\implies \tau_{ij} = \tau_{ji}$ — real.



Elementos Diagonales.

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{jj}}{\partial t} = \frac{i\hbar}{T_1} (\rho_{jj}^e - \rho_{jj})$$

- ρ_{jj}^e –Valores matriciales en equilibrio termodinámico.
- T_1 – Constante de tiempo de decaimiento: $\rho_{jj} \longrightarrow \rho_{jj}^e$



Constantes de tiempo.

- T_1 – Tiempo de relajación Longitudinal.
- $\tau_{12} \equiv T_2$ – Tiempo de relajación Transversal



$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = \text{Tr}(\dot{\rho}A)$$

Derivadas temporales del valor esperado de un operador.

- $\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} = \langle \dot{A} \rangle$
- (†):

$$\langle \dot{A} \rangle + \frac{\langle A \rangle}{T_2} - \frac{\langle A \rangle^e}{T_1} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, \mathcal{H}] \rangle + \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \sum_i \rho_{ii} A_{ii}$$

- Aquí $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}^1$



Dos casos de interés:

- Todos los elementos diagonales de A son cero:

$$\langle \dot{A} \rangle + \frac{\langle A \rangle}{T_2} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, \mathcal{H}] \rangle$$

- Sólo los elementos diagonales de A son diferentes de cero:

$$\langle \dot{A} \rangle + \frac{\langle A \rangle - \langle A \rangle^e}{T_1} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, \mathcal{H}] \rangle$$

- Estas ecuaciones permitirán encontrar las ecuaciones de movimiento para la descripción de láseres y amplificadores de fibra óptica.



Segundas derivadas.



$$\langle \ddot{A} \rangle + \frac{\langle \dot{A} \rangle}{T_2} = \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \langle [A, \mathcal{H}] \rangle$$

- El lado derecho de esta ecuación se evalúa de acuerdo a la expresión (†):

$$\langle \ddot{A} \rangle + \frac{\langle \dot{A} \rangle}{T_2} + \frac{\langle A \rangle}{T_2^2} = -\frac{1}{\hbar} \left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right] \langle [[A, \mathcal{H}], \mathcal{H}] \rangle + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right]$$



Hamiltoniano de Interacción

Aproximación Eléctrica-Dipolar

Para el caso de un modelo atómico simplificado, conformado por un solo electrón de carga $-e$ y masa m moviéndose en un potencial $\mathbb{V}(r)$ y un núcleo masivo fijo, el hamiltoniano del electrón (sin considerar spin ni efectos relativistas):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \mathbb{V} - e\Phi$$

Aquí:

- $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{A}$ – impulso canónico.
- \mathbf{A} y Φ son los potenciales vectoriales y escalares, respectivamente.



Hamiltoniano de Interacción

En una región sin cargas podemos escoger la función potencial de tal forma que $\Phi = 0$ y los campos puedan ser obtenidos a partir del potencial vectorial através de las relaciones:

- $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
- $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Con lo que el hamiltoniano de interacción se expresa:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbb{V} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$$

Aquí $\boldsymbol{\mu} = -e\mathbf{r}$ es el operador momento dipolar eléctrico.



Hamiltoniano de Interacción

- Los elementos matriciales de \mathcal{H}' se obtienen de manera convencional:

$$\mathcal{H}'_{mn} = \langle u_m | \mathcal{H}' | u_n \rangle = \langle u_m | \mu \cdot \mathbf{E} | u_n \rangle$$

- Sabemos que $\mathcal{H}_0 | u_n \rangle = E_m | u_m \rangle$, donde E_m es el valor propio correspondiente al vector propio $| u_n \rangle$.
- Entonces los elementos matriciales del operador de interacción son:

$$\mathcal{H}'_{mn} = -\mu_{mn} \cdot \mathbf{E}$$



Átomo de dos Niveles (A2N)

- En la compleja estructura de los niveles energéticos de un átomo o molécula. Consideramos sólo dos, que corresponden a la transición de trabajo

$$E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$

- Hamiltoniano del sistema:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mu_\alpha E_\alpha.$$

Aquí $\alpha = x, y, z$, suma sobre índices repetidos.



Átomo de dos Niveles (A2N)

- Para conformar el hamiltoniano de reposo del A2N, recordamos: $(\mathcal{H}_0)_{mn} \equiv \langle u_m | \mathcal{H}_0 | u_m \rangle = E_m \delta_{mn}$, de donde

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

- El operador eléctrico dipolar para el A2N es:

$$\mu_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \mu_\alpha \\ \mu_\alpha^* & 0 \end{pmatrix}$$



Átomo de dos Niveles (A2N)

Hamiltoniano de Interacción.

- Con este operador podemos escribir las ecuaciones de movimiento:

$$\langle \dot{\mu}_\alpha \rangle + \frac{\langle \mu_\alpha \rangle}{T_2} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mu_\alpha, \mathcal{H}] \rangle$$

-

$$\mathcal{H}' = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_\alpha E_\alpha \\ -\mu_\alpha^* E_\alpha & 0 \end{pmatrix}$$



- $[\mu_\alpha, \mathcal{H}] = [\mu_\alpha, \mathcal{H}_0] + [\mu_\alpha, \mathcal{H}'] = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & -\mu_\alpha \\ -\mu_{\alpha^*} & 0 \end{pmatrix}$
- La matriz resultante no es reconocida como uno de los operadores previamente definidos.
- Debemos utilizar ecuaciones de movimiento de orden superior:

$$\langle \ddot{\mu}_\alpha \rangle + \frac{\langle \dot{\mu}_\alpha \rangle}{T_2} + \frac{\langle \mu_\alpha \rangle}{T_2^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \langle [[\mu_\alpha, \mathcal{H}], \mathcal{H}] \rangle$$



- Evaluando el conmutador obtenemos:

$$[[\mu_\alpha, \mathcal{H}], \mathcal{H}] = \hbar^2 \Omega^2 \begin{pmatrix} 0 & \mu_\alpha \\ \mu_\alpha^* & 0 \end{pmatrix} - 2\hbar\Omega(\mu_\alpha\mu_\beta^*)E_\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $Tr \left[\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = (\rho_{11} - \rho_{22})$
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – diferencia de propabilidades de población entre los niveles del A2N.



Ecuación de movimiento para el momento eléctrico dipolar:

$$\langle \ddot{\mu}_\alpha \rangle + \frac{2}{T_2} \langle \dot{\mu}_\alpha \rangle + \Omega^2 \langle \mu_\alpha \rangle = \frac{2\Omega}{\hbar} (\mu_\alpha \mu_\beta^*) (\rho_{11} - \rho_{22}) E_\beta^{loc}$$

- $E^{loc} = \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 + 2}{3} \right) E$
- $\Omega^2 \gg 1/T_2^2$

Para obtener observables macroscópicas hay que promediar por todas las moléculas del medio. Con lo que encontramos la ecuación para la polarización.



Ecuación de movimiento para la polarización del medio

$$\ddot{\mathbf{P}} + \frac{2}{T_2} \dot{\mathbf{P}} + \Omega^2 \mathbf{P} = \frac{2\Omega}{\hbar} \frac{|\mu_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) \mathbf{E}^{loc}$$



Ecuación de movimiento para la Diferencia de Poblaciones

- $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11} - \rho_{22})^e}{T_1} = \frac{1}{i\hbar} \langle [D, \mathcal{H}] \rangle$$

- $$[D, \mathcal{H}] = [D, \mathcal{H}_0] + [D, \mathcal{H}'] = [D, \mathcal{H}'] = -2E_\alpha \begin{pmatrix} 0 & -\mu_\alpha \\ -\mu_\alpha^* & 0 \end{pmatrix}$$



Ecuación de movimiento para la Diferencia de Poblaciones

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_1 - N_2) + \frac{(N_1 - N_2) - (N_1 - N_2)^e}{T_1} = \frac{2}{\hbar\Omega} \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{E}$$



Ecuación de Onda (1D)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$

- $E = E(z, t)$ – Campo eléctrico de la onda luminosa
- $P_L = P_L(z, t)$ – Polarización lineal.
- La contribución no lineal a la polarización:

$$P_{NL} = P_{el}(z, t) + P_{mol}(z, t) + P_{ion}(z, t)$$

- Posteriormente re trabajaremos la Ecuación de Onda para el caso de amplitudes de variación lenta.



$$P_{NL} = P_{el}(z, t) + P_{mol}(z, t) + P_{ion}(z, t)$$

La polarización juega un papel de enorme importancia en los LFA. Esto lo resaltamos, escribiendo la polarización no lineal a partir de sus componentes.

Contribución no resonante de los electrones, efecto Kerr:

$$P_{el}(z, t) = \frac{3}{8} \chi^{(3)} |E_0|^2 E_0 \exp \{i(\omega_0 t - k_0 z)\} + cc$$

$E_0(z, t)$ – Es la amplitud compleja del campo eléctrico:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} E_0(z, t) \exp \{i(\omega_0 t - k_0 z)\} + cc$$



$$P_{NL} = P_{el}(z, t) + P_{mol}(z, t) + P_{ion}(z, t)$$

En fibras ópticas el principal efecto de la $P_{el}(z, t)$ en la propagación de luz intensa en fibras es la automodulación de fase.

A partir de la contribución al índice de refracción:

$$n(\omega, I) = n_0(\omega) + \frac{3\pi}{n_0(\omega)} \chi^{(3)} I(z, t)$$

- $n_0(\omega)$ –Índice de refracción lineal, dependiente de la frecuencia.
- $I(z, t) = \frac{cn_0}{8\pi} |E_0|^2$
- $\chi^{(3)}(\omega)$ –Susceptibilidad óptica de tercer orden.
- $n_2 = \frac{3\pi}{n_0(\omega)} \chi^{(3)} \equiv 3,2 \times 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$
($\lambda = 1,55 \mu\text{m}$).



$$P_{NL} = P_{el}(z, t) + P_{mol}(z, t) + P_{ion}(z, t)$$

P_{mol} – Contribución del esparcimiento Raman a la polarización no lineal. En la descripción semiclásica las oscilaciones Raman y la polarización:

$$P_{mol}(z, t) = N_m \alpha'_Q Q(z, t, E_0)$$

- N_m – número de moléculas por unidad de volumen.
- α'_Q – polarizabilidad electrónica de la molécula.



$$P_{NL} = P_{el}(z, t) + P_{mol}(z, t) + P_{ion}(z, t)$$

Para determinar Q se debe plantear un sistema de ecuaciones para las Oscilaciones de Q y para la dinámica poblacional dependiente del campo de la onda luminosa.

Para pulsos de duración $\tau_0 > 100fs$, la respuesta es cuasiestacionaria:

$$P_{mol}(z, t) = \frac{N_m(\alpha'_Q)^2}{4M\Omega_R^2} |E_0|^2 E$$

Se encuentra que la contribución al índice de refracción es:

$$n_2^R = 0,2n_2$$



$$P_{NL} = P_{el}(z, t) + P_{mol}(z, t) + P_{ion}(z, t)$$

P_{ion} –Contribución resonante de los iones activos del medio. La cual queda determinada por las ecuaciones de movimiento para la polarización y para la diferencia de poblaciones.

En el caso $N_i = N_0$ –const, podemos simplificar:

$$P_{ion} = i \frac{cN_0\sigma_0}{2n_0\Omega} \cdot \frac{1 - iT_2\Delta\omega}{1 + (T_2\Delta\omega)^2}$$

$\sigma_0 = (4\pi T_2^i |\mu_{12}|^2 \Omega) / (\hbar c)$ –sección transversal de la transición.

$$\Delta\omega = (\omega_0 - \Omega)$$



Ecuación No Lineal de Schrödinger

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$

El estudio teórico-computacional de esta ecuación es en extremo complicado.

Podemos estudiar la evolución de las envolventes complejas del campo eléctrico ¹). Esto es cuando:

$$\left| \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right| \ll \Omega \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right|$$

¹Ver G.P. Agrawal "Nonlinear Fiber Optics" Academic Press, 3rd Ed.,(2001)



Ecuación No Lineal de Schrödinger

Por lo que podemos trabajar con la ecuación no lineal de Schrödinger normalizada ($\tau_0 \sim 100fs$):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + (1 - \beta) |\Psi|^2 \Psi + \beta Q \Psi + \frac{G}{2} P$$

La distancia z está expresada en términos de la longitud de dispersión $L_D = \tau_0^2 / |k''_\omega|$, el tiempo $\tau = (t - z/u) / \tau_0$, β representa la contribución Raman. El término de ganancia viene dado por $G = L_D / L_A$, L_A longitud de amplificación.



Ecuación No Lineal de Schrödinger ($\tau_0 \sim 100fs$)

Simultáneamente debemos resolver las ecuaciones:

Dinámica molecular:

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + 2\mu\delta \frac{\partial Q}{\partial t} + Q = |\Psi|^2.$$

Polarización de los iones activos:

$$\frac{T_2^i}{\tau_0} \frac{\partial P}{\partial t} + P(1 + iT_2^i \Delta\omega) = i\Psi.$$



Ecuación No Lineal de Schrödinger ($\tau_0 > 100fs$)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + |\Psi|^2 \Psi - 2\mu\delta \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial \tau} \Psi + i \frac{G}{2} \left(\Psi - \frac{T_2^i}{\tau_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{T_2^{i^2}}{\tau_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} \right)$$



Ecuación No Lineal de Schrödinger ($\tau_0 > 1 \text{ ps}$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi + i \frac{G}{2} \psi$$



Formalmente podemos escribir la ENLS:

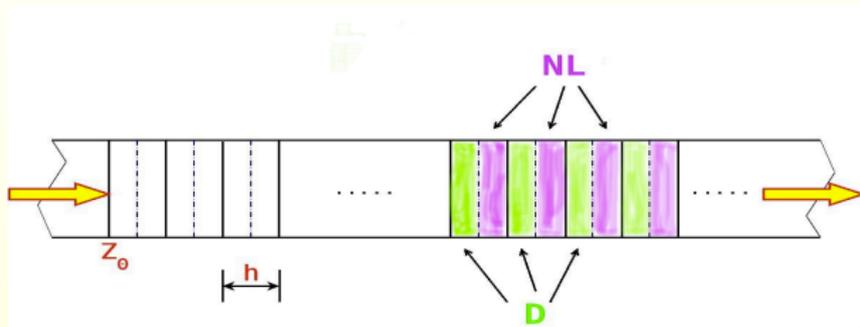
$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})\Psi$$

\hat{D} , \hat{N} Son los operadores No Lineal y de Difracción:

- $\hat{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \text{T.O.S.}$
- $\hat{N} = |\Psi|^2 \Psi + \text{T.O.S.}$



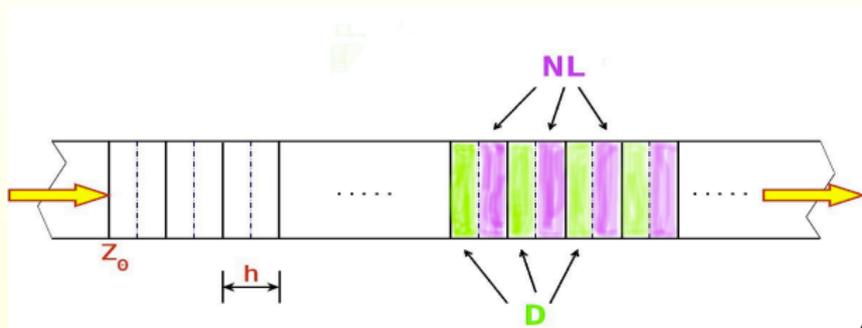
Método de Partición de Paso Fourier



- $\Psi(z + h, t) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) \Psi(z, t)$
(Precisión: $O(h^2)$)



Método de Partición de Paso Fourier



- $\Psi(z + h, t) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) \Psi(z, t)$
(Precisión: $O(h^2)$)
- $\Psi(z + h, t) \approx \exp(\frac{h}{2}\hat{D}) \exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right) \exp(\frac{h}{2}\hat{D}) \Psi(z, t)$
(Precisión: $O(h^3)$)



Conclusiones

En esta primera hora basados en el modelo semiclásico de interacción radiación materia, hemos obtenido el aparato matemático que nos permite analizar el funcionamiento de láseres y amplificadores en fibra óptica.

Discutimos brevemente los metodos de análisis numérico para la solución de estas ecuaciones.

