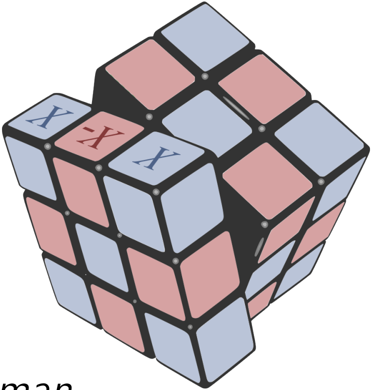
Exotic aspherical 4-manifolds



June 9, 2025

Kyle Hayden

with Davis, Huang, Ruberman, and Sunukjian

Borel writes to Serre about Mostow's results (1953):

de dim. 3.

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1, G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut êtr énormément simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient B_1, B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphes ? et si oui, le sont-elles par la project

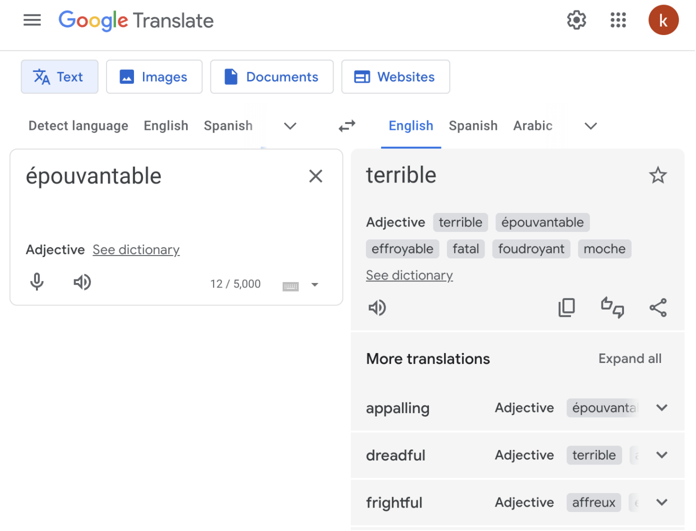
Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1,G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut être énorméuent simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient B_1,B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphs ?

Borel writes to Serre about Mostow's results (1953):

de dim. 3.

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1, G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut être énormément simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient B_1, B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphes ? et si oui, le sont-elles par la project

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1,G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, **sa démonstration est épouvantable**, mais peut être énorméuent simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient B_1,B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphs ?


Google Translate
k
Text
Images
Documents
Websites
Detect language
English
Spanish
English
Spanish
Arabic
épouvantable
Adjective
See dictionary
12 / 5,000
terrible
Adjective
terrible
épouvantable
effroyable
fatal
foudroyant
moche
See dictionary
More translations
Expand all
appalling
Adjective
dreadful
Adjective
terrible
frightful
Adjective
affreux

Borel writes to Serre about Mostow's results (1953):

de dim. 3.

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1,G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papéer sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut êtr énormément simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces unive sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient B_1,B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphes ? et si oui, le sont-elles par la project

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1,G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut être énorméuent simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : **Soient B_1,B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphs ?**

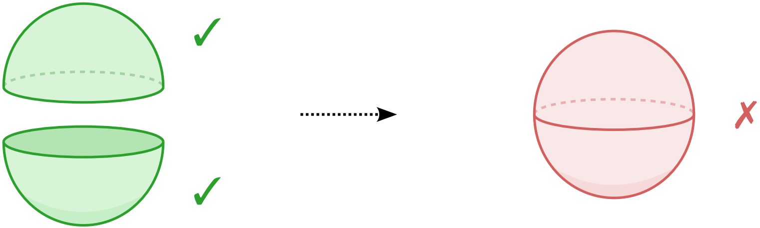
Borel writes to Serre about Mostow's results (1953):

de dim. 3.

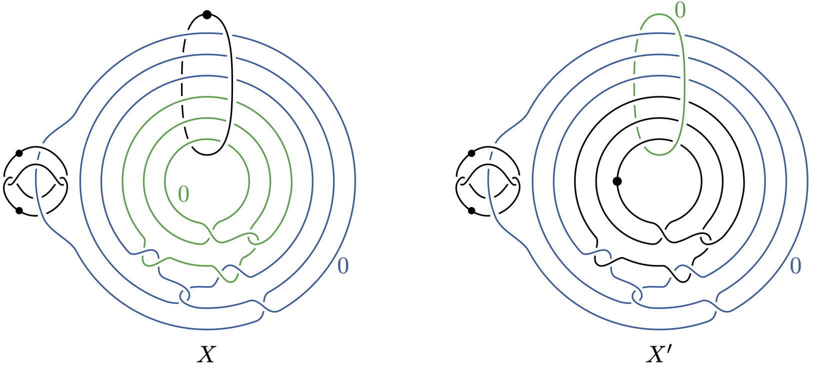
Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1,G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut être énormément simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient B_1,B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphes ? et si oui, le sont-elles par la project

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1,G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut être énorméuent simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : **Soient B_1,B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimen sions. Sont-elles homéomorphs ?**

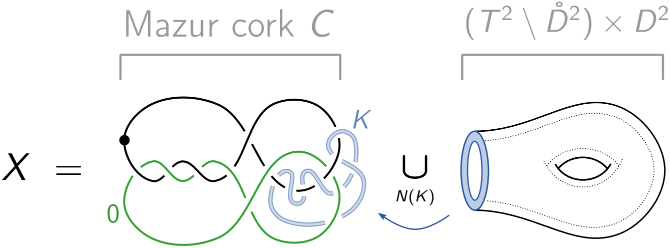
i.e., closed aspherical spaces



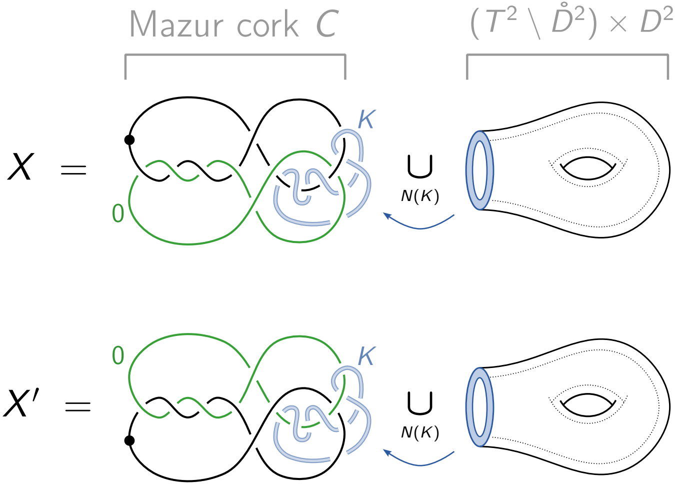
Input manifolds X, X'



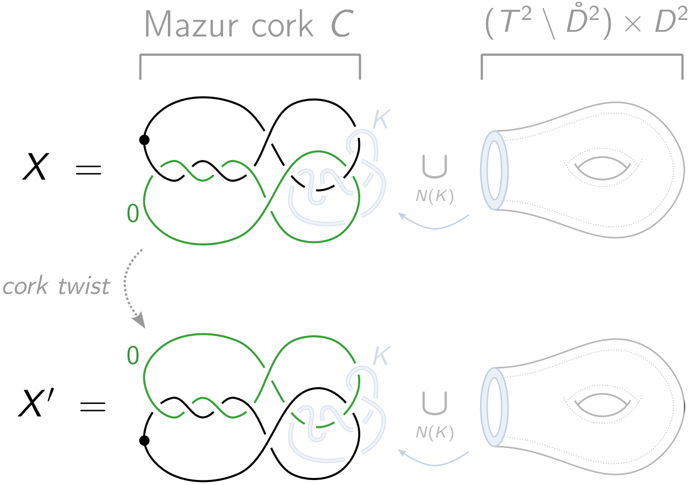
Input manifolds X, X'



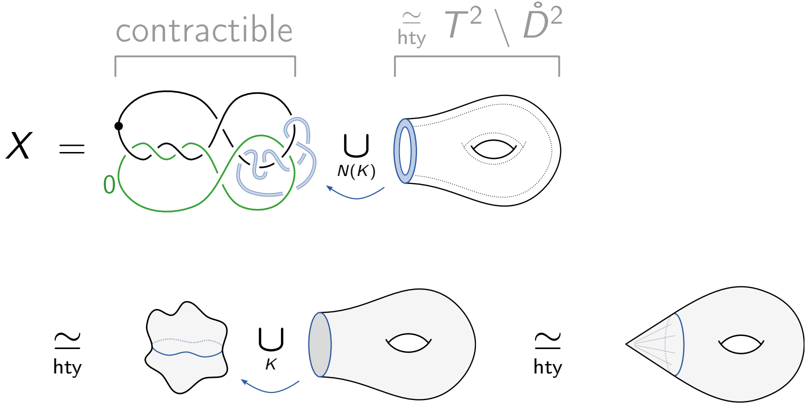
Input manifolds X, X'



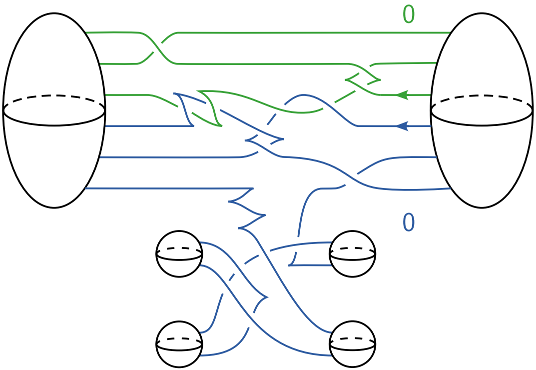
Input manifolds X, X'



X and X' are homotopy equivalent to T^2:

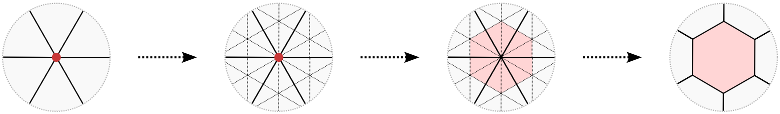


$X \quad =$

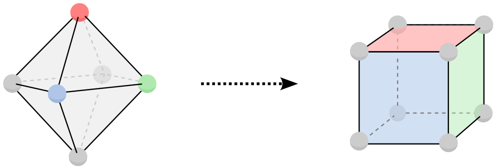


Technical aside:

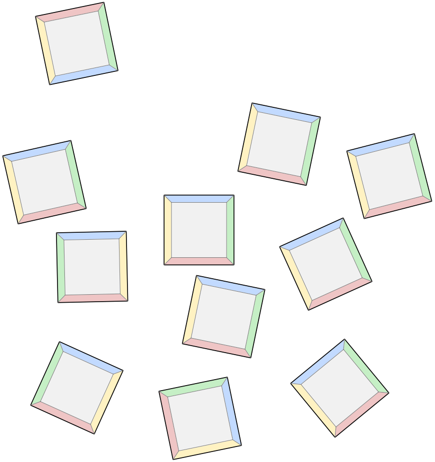
Take flag triangulation $\mathcal{T}$ of ∂X and let $\mathcal{T}'$ denote the dual cell structure $\mathcal{T}'$ of ∂X. Glue along faces of $\mathcal{T}'$.



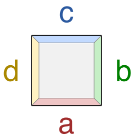
Example:



Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$

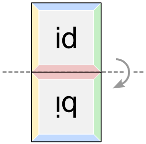


$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \\ \qquad [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \end{array} \right\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$

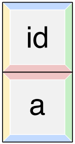
$$\Gamma = \Big\langle a, b, c, d \;\Big|\; a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \\ [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \Big\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



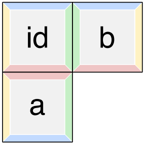
$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \right.$$
$$\left. [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \right\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



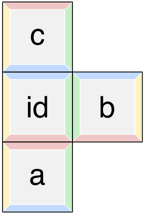
$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \right.$$
$$\left. [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \right\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



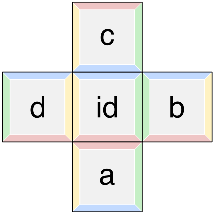
$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \\ \qquad [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \end{array} \right\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



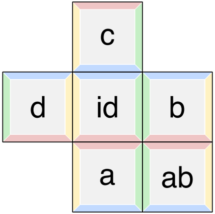
$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \,\middle|\, a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \right.$$
$$\left. [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \right\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



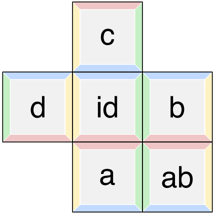
$$\Gamma = \Big\langle a, b, c, d \;\Big|\; a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1,$$
$$[a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \Big\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \right\rangle$$

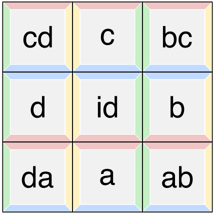
Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



(= ba)

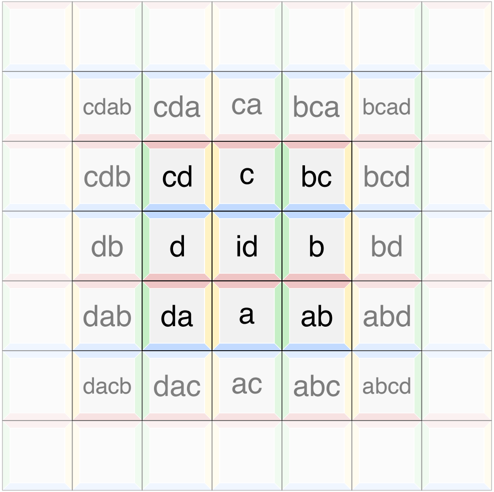
$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \,\middle|\, a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \right.$$
$$\left. [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \right\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$



$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \right.$$
$$\left. [a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \right\rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1], \;\; D(X) = \mathbb{R}^2$



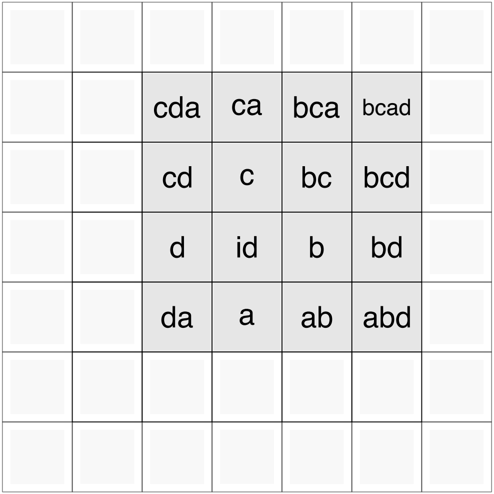
$$\Gamma = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1,$$
$$[a,b] = [b,c] = [c,d] = [d,a] = 1 \rangle$$

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$, $D(X) = \mathbb{R}^2$

	cdab	cda	ca	bca	bcad	
	cdb	cd	c	bc	bcd	
	db	d	id	b	bd	
	dab	da	a	ab	abd	
	dacb	dac	ac	abc	abcd	

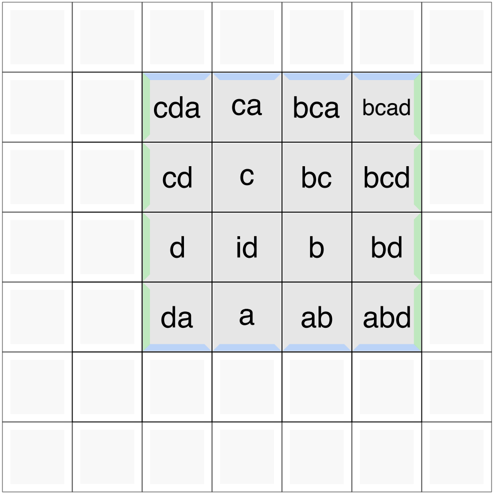
Now quotient by commutator subgroup of Γ.

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$, $D(X) = \mathbb{R}^2$



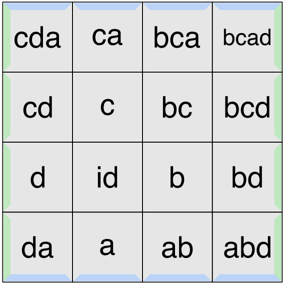
Now quotient by commutator subgroup of Γ.

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$, $D(X) = \mathbb{R}^2$



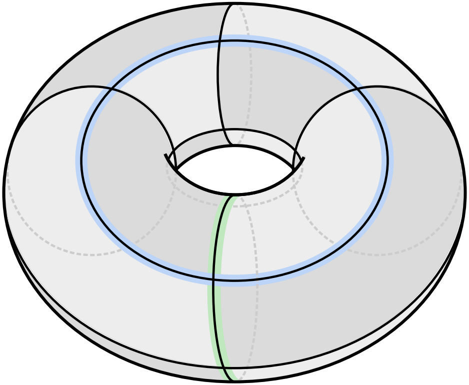
Now quotient by commutator subgroup $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1], \; D(X) = \mathbb{R}^2$

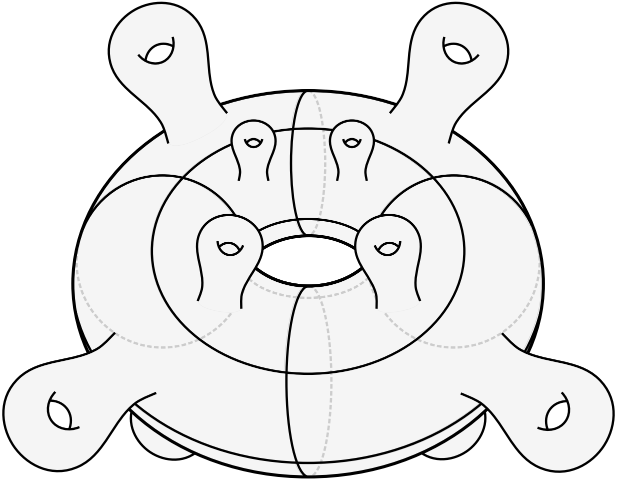


Γ_0 glues sides of fundamental domain = 16 squares

Example: $X = D^2 \cong [0,1] \times [0,1]$, $D(X) = \mathbb{R}^2$

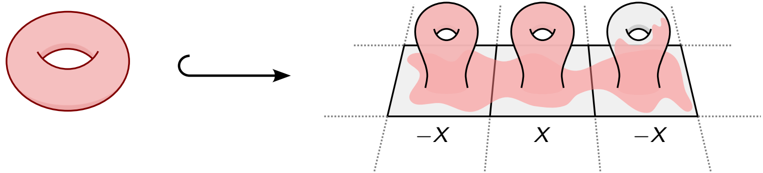


$Q(X) = T^2$

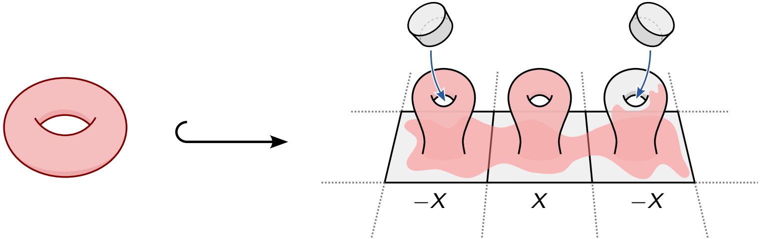


$Q(X)$

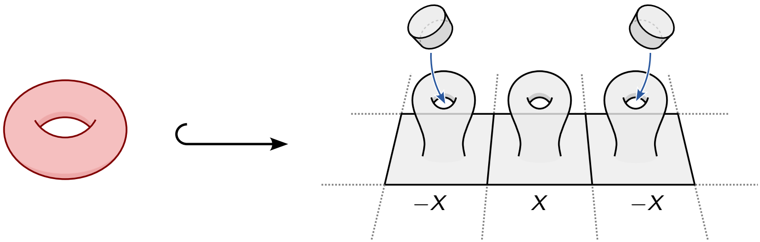
Any $T^2 \hookrightarrow D(X)$ meets finitely many $\pm X$.



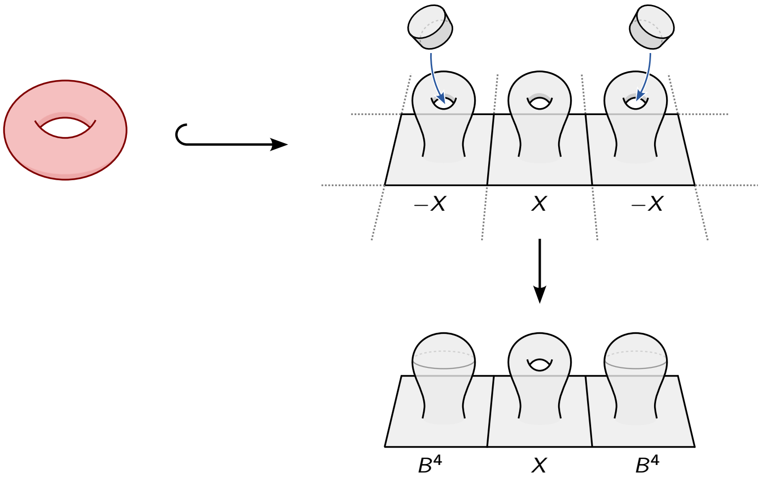
Attach handles to all but one X, turning them to B^4's.



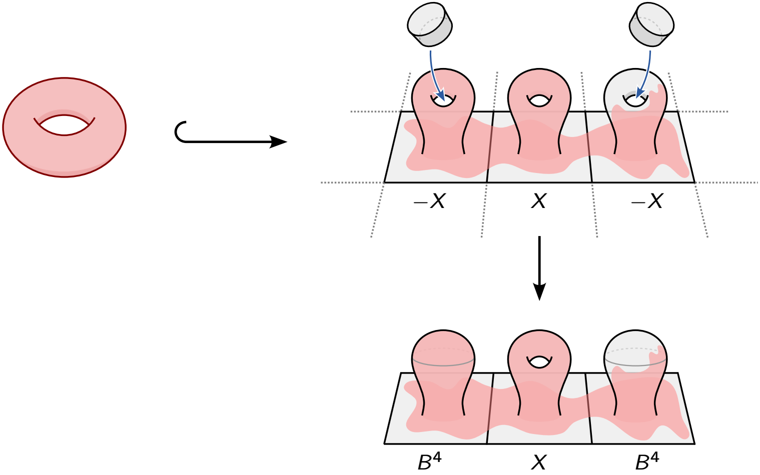
Attach handles to all but one X, turning them to B^4's.



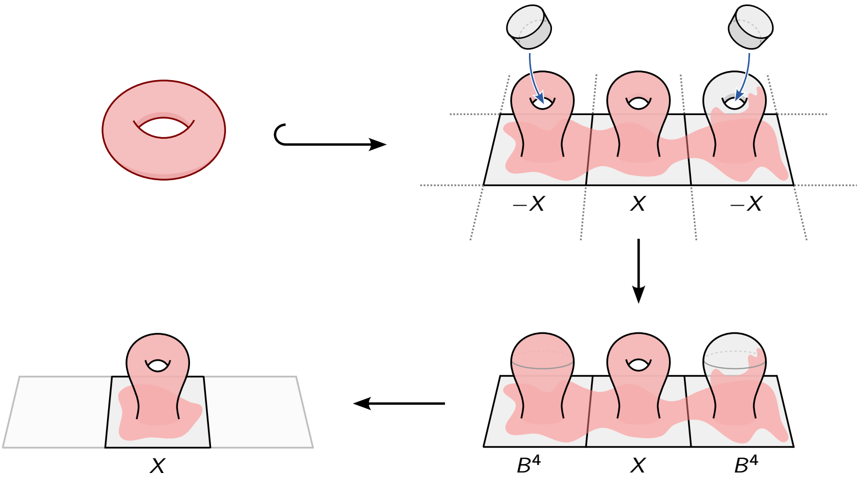
Attach handles to all but one X, turning them to B^4's.



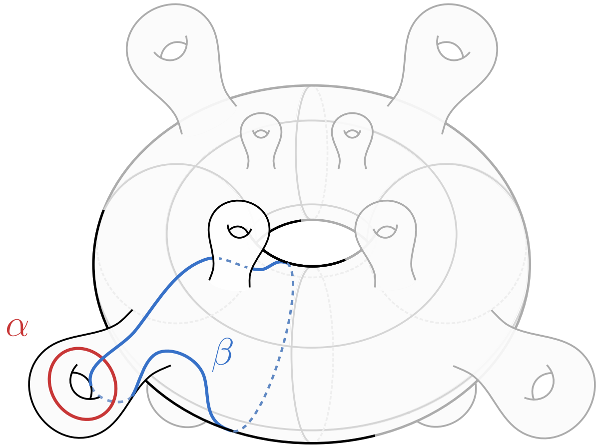
Attach handles to all but one X, turning them to B^4's.



Drag the torus back into the one copy of X.

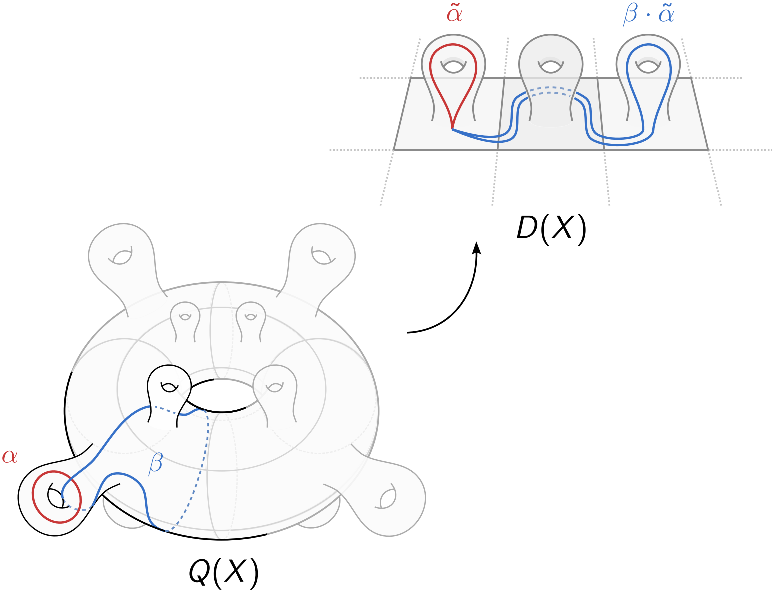


Suppose α, β generate $\mathbb{Z}^2 \subset \pi_1(Q(X))$, where $\beta \notin \pi_1(D(X))$.

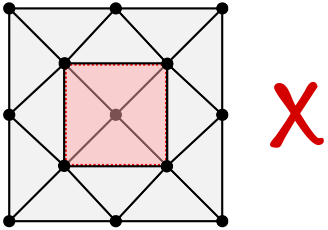


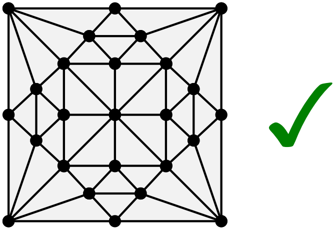
$Q(X)$

Lift to $D(X)$ and analyze action of β^n on $\widetilde{\alpha}$.



no squares $\equiv$ any cycle of length 4 has diagonal edge





(This ensures Γ_0 has no $\mathbb{Z}^2$-subgroups.)

Thank you!