AGRA 2021: INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE FOURIER DE ORDEN SUPERIOR

PONENTES:
PABLO CANDELA Y JULIA WOLF

La combinatoria aritmética es un área muy activa de las matemáticas actuales, en la cual se combinan ideas y técnicas de campos como el análisis armónico, la teoría de grafos, o la teoría de la probabilidad, con el fin de estudiar la estructura de varios tipos de subconjuntos de grupos abelianos. En este curso nos adentraremos en la combinatoria aritmética a través de una teoría especialmente interesante que se ha estado desarrollando en esta área en las últimas dos décadas, a saber, el análisis de las llamadas *normas de uniformidad*, o normas de Gowers. Esta teoría se conoce como el *análisis de Fourier de orden superior*. Trataremos algunos aspectos centrales de esta teoría y estudiaremos algunas de sus importantes aplicaciones combinatorias, en particular las aplicaciones relativas al célebre Teorema de Szemerédi.

Las normas de uniformidad, introducidas por Tim Gowers a finales de los años 1990, son herramientas de gran utilidad en varias áreas matemáticas, primero en combinatoria aritmética (su área de origen) pero también en áreas del análisis como la teoría ergódica (mediante normas análogas introducidas por Host y Kra), y hasta en informática teórica. Hay una tal norma, llamada *norma de uniformidad de orden* d, o *norma* U^d, para cada entero $d \geq 2$.

La norma U^2 está estrechamente relacionada con el análisis de Fourier clásico, como veremos en este curso. Resulta que el análisis de cada norma U^d con $d > 2$ requiere una teoría análoga al análisis de Fourier, que hoy en día se sigue desarrollando. Estudiaremos algunos de los primeros avances que se dieron en esta dirección, relativos a la norma U^3. Un ejemplo central de tales avances es el llamado *Teorema inverso para la norma* U^3, demostrado por Ben Green y Terence Tao hacia 2005. Estudiaremos partes principales de la prueba de este teorema.

Entre las aplicaciones más conocidas de las normas de Gowers, están las relativas al Teorema de Szemerédi mencionado anteriormente. Este teorema nos dice que para todo entero positivo k y cualquier parámetro $\delta > 0$, si N es un entero suficientemente grande entonces cualquier subconjunto A de los enteros $\{1, 2, \ldots, N\}$ con $|A| \geq \delta N$ debe contener alguna progresión aritmética $\{x, x + d, \ldots, x + (k - 1)d\}$ con $d \neq 0$. Este teorema, que tiene versiones análogas en varios grupos abelianos otros que el de los enteros (por ejemplo en espacios vectoriales finitos $\mathbb{F}_p^n$), es de gran importancia en combinatoria. El teorema tiene entre sus cualidades notables la de ilustrar de modo sorprendente uno de los principios generales de la combinatoria, a saber, que en cualquier conjunto suficientemente grande deben existir estructuras regulares, o, como lo decía T.S. Motzkin: *el desorden completo es imposible.* Como aplicación central del Teorema inverso para la norma U^3, trataremos una prueba efectiva del Teorema de Szemerédi para progresiones aritméticas de longitud 4, para subconjuntos de espacios vectoriales finitos.

El curso se desarrollará en 5 horas de clases de teoría y 2 horas de clases de ejercicios. Los temas y resultados principales que trataremos en las clases de teoría serán los siguientes:

- Introducción a la combinatoria aritmética a través del Teorema de Szemerédi.
- El caso $k = 3$ del Teorema de Szemerédi (Teorema de Roth) y su relación con el análisis de Fourier.
- Limitaciones del análisis de Fourier respecto al Teorema de Szemerédi para $k > 3$. Motivación de las normas de Gowers.
- Definición y propiedades básicas de las normas de Gowers.
- El Teorema de Von Neumann generalizado, y su uso para controlar conteos de configuraciones aritméticas en subconjuntos de grupos abelianos.
- Motivación del Teorema inverso para la norma U^3.
- Prueba del Teorema inverso para la norma U^3 en espacios vectoriales finitos.
- Aplicación del Teorema inverso para demostrar el Teorema de Szemerédi para progresiones aritméticas de longitud 4.

References

[1] W. T. Gowers, *Generalizations of Fourier analysis, and how to apply them*, Bulletin of the American Mathematical Society **54** (2016), no. 1, 1–44.

[2] Ben Green, *Montréal notes on quadratic Fourier analysis*, Additive combinatorics, vol. 43, Cambridge University Press, 2007, pp. 69–102.

[3] Terence Tao and Van Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge University Press, vol. 105, Cambridge University Press, 2010.

[4] Julia Wolf, *Finite field models in arithmetic combinatorics – ten years on*, Finite Fields and their Applications **32** (2015), 233–274.