Combinatória de superfícies quadriculadas e geometria de espaços de módulos

1.ª aula

Carlos Matheus

CNRS & École Polytechnique

16 de agosto de 2021

Sumário

Pares de permutações (I)

Uma *superfície quadriculada* (ou *origami*) é determinada por um par de permutações $h, v \in S_n$ através da seguinte construção:

Pares de permutações (I)

Uma *superfície quadriculada* (ou *origami*) é determinada por um par de permutações $h, v \in S_n$ através da seguinte construção:

Tomamos n cópias $Sq(j)$, $j = 1, \ldots, n$, do quadrado $[0,1] \times [0,1]$, e colamos *por translações* o lado direito de $Sq(j)$ com o lado esquerdo de $Sq(h(j))$ e o topo de $Sq(j)$ com o fundo de $Sq(v(j))$.

Pares de permutações (I)

Uma *superfície quadriculada* (ou *origami*) é determinada por um par de permutações $h, v \in S_n$ através da seguinte construção:

Tomamos n cópias $Sq(j)$, $j = 1, \dots, n$, do quadrado $[0,1] \times [0,1]$, e colamos *por translações* o lado direito de $Sq(j)$ com o lado esquerdo de $Sq(h(j))$ e o topo de $Sq(j)$ com o fundo de $Sq(v(j))$.

Observação

A superfície quadriculada é *conexa* se e somente se h e v agem *transitivamente* em $\{1, \dots, n\}$.

Pares de permutações (II)

Observação

Como estamos interessados nos origamis, vamos *desconsiderar* o modo particular de enumerar seus quadrados declarando que (h, v) e $(\sigma h \sigma^{-1}, \sigma v \sigma^{-1})$ são *equivalentes*.

Pares de permutações (II)

Observação

Como estamos interessados nos origamis, vamos *desconsiderar* o modo particular de enumerar seus quadrados declarando que (h, v) e $(\sigma h\sigma^{-1}, \sigma v\sigma^{-1})$ são *equivalentes*.

Exemplos

As permutações $h = (1) = v$ geram o toro plano $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ enquanto que as permutações $h = (1)(2,3)$ e $v = (1,2)(3)$ geram um origami em forma de L (ver abaixo).

Pares de permutações (III)

Exemplos

Um grupo finito G gerado por dois elementos r e u (e.g., $G = A_n$, S_n, $SL(2,\mathbb{F}_p)$) fornece um origami porque r e u agem em G por permutações (i.e., $g \mapsto gr$ e $g \mapsto gu$).

Pares de permutações (III)

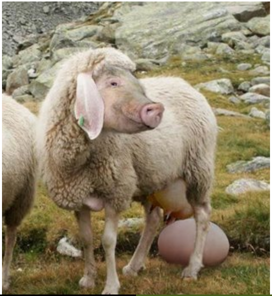
Exemplos

Um grupo finito G gerado por dois elementos r e u (e.g., $G = A_n$, S_n, $SL(2,\mathbb{F}_p)$) fornece um origami porque r e u agem em G por permutações (i.e., $g \mapsto gr$ e $g \mapsto gu$). Em particular, o grupo dos quatérnios $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ gera um origami chamado *Eierlegende Wollmilchsau* (ver abaixo).

Pares de permutações (III)

Exemplos

Um grupo finito G gerado por dois elementos r e u (e.g., $G = A_n$, S_n, $SL(2,\mathbb{F}_p)$) fornece um origami porque r e u agem em G por permutações (i.e., $g \mapsto gr$ e $g \mapsto gu$). Em particular, o grupo dos quatérnios $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ gera um origami chamado *Eierlegende Wollmilchsau* (ver abaixo).



Pares de permutações (III)

Exemplos

Um grupo finito G gerado por dois elementos r e u (e.g., $G = A_n$, S_n, $SL(2,\mathbb{F}_p)$) fornece um origami porque r e u agem em G por permutações (i.e., $g \mapsto gr$ e $g \mapsto gu$). Em particular, o grupo dos quatérnios $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ gera um origami chamado *Eierlegende Wollmilchsau* (ver abaixo).

Recobrimentos ramificados do toro plano (I)

Por definição, um origami é um recobrimento finito do toro plano $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ o qual não é ramificado fora da origem $0 \in \mathbb{T}^2$ (ver abaixo o exemplo do origami em forma de L).

Recobrimentos ramificados do toro plano (II)

Os pontos de ramificação de um origami são ditos *singularidades cônicas*. Do ponto de vista combinatório, eles correspondem aos *ciclos não-triviais* do *comutador* $[h,v]=vhv^{-1}h^{-1}$ (ver abaixo).

Recobrimentos ramificados do toro plano (III)

Em particular, a topologia do origami é determinada por $[h,v]$. De fato, se os ciclos não-triviais de $[h,v]$ possuem tamanhos k_1+1, $\dots$, $k_\sigma+1$, então o gênero g do origami é

$$2-2g=(n-\sum_{j=1}^{\sigma}k_j)-3n+2n=-k_1-\cdots-k_\sigma$$

(ver abaixo)

Recobrimentos ramificados do toro plano (III)

Em particular, a topologia do origami é determinada por $[h, v]$. De fato, se os ciclos não-triviais de $[h, v]$ possuem tamanhos $k_1 + 1$, $\ldots$, $k_\sigma + 1$, então o gênero g do origami é

$$2 - 2g = (n - \sum_{j=1}^{\sigma} k_j) - 3n + 2n = -k_1 - \cdots - k_\sigma$$

(ver abaixo)

Os origamis com $[h, v]$ com ciclos não-triviais de tamanhos $k_1 + 1$, $\ldots$, $k_\sigma + 1$ formam um subconjunto do *estrato* $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_\sigma)$.

Recobrimentos ramificados do toro plano (IV)

Durante o curso, vamos tentar evitar o uso de "quadrados supérfluos" assumindo sempre que possível que os origamis são *reduzidos*: isso significa que os recobrimentos associados não se fatoram via $\mathbb{C}/(n\mathbb{Z}\oplus im\mathbb{Z})\to\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\oplus i\mathbb{Z})$ com $n\cdot m>1$:

Ação de $SL(2,\mathbb{Z})$

O grupo $SL(2,\mathbb{Z})$ é gerado pelas matrizes

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ação de $SL(2,\mathbb{Z})$

O grupo $SL(2,\mathbb{Z})$ é gerado pelas matrizes

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como T e S estabilizam o toro $\mathbb{T}^2$ (ver abaixo),

qualquer elemento de $SL(2,\mathbb{Z})$ transforma origamis em origamis.

Transformações de Nielsen

Do ponto de vista combinatório, T e S transformam o par de permutações (h, v) em

$$T(h,v) = (h, vh^{-1}) \quad \mathrm{e} \quad S(h,v) = (hv^{-1}, v)$$

Transformações de Nielsen

Do ponto de vista combinatório, T e S transformam o par de permutações (h,v) em

$$T(h,v)=(h,vh^{-1}) \quad \text{e} \quad S(h,v)=(hv^{-1},v)$$

Essas transformações são conhecidas na teoria de grupos sob o nome de *transf. de Nielsen*: de fato, elas foram introduzidas por Nielsen em sua caracterização dos geradores do grupo livre F_2.

Transformações de Nielsen

Do ponto de vista combinatório, T e S transformam o par de permutações (h, v) em

$$T(h, v) = (h, vh^{-1}) \quad \text{e} \quad S(h, v) = (hv^{-1}, v)$$

Essas transformações são conhecidas na teoria de grupos sob o nome de *transf. de Nielsen*: de fato, elas foram introduzidas por Nielsen em sua caracterização dos geradores do grupo livre F_2.

Como T e S preservam $[h, v]$, a ação de $SL(2,\mathbb{Z})$ permuta origamis em cada estrato $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_\sigma)$ fixado.

Grupos de Veech

O *grupo de Veech* de um origami (reduzido) (h, v) é o subgrupo de $SL(2,\mathbb{Z})$ que o estabiliza.

Grupos de Veech

O *grupo de Veech* de um origami (reduzido) (h, v) é o subgrupo de $SL(2,\mathbb{Z})$ que o estabiliza.

Observação

Os grupos de Veech são subgrupos de índice finito de $SL(2,\mathbb{Z})$.

Grupos de Veech

O *grupo de Veech* de um origami (reduzido) (h, v) é o subgrupo de $SL(2,\mathbb{Z})$ que o estabiliza.

Observação

Os grupos de Veech são subgrupos de índice finito de $SL(2,\mathbb{Z})$.

Conforme vimos acima, o grupo de Veech de $\mathbb{T}^2$ é $SL(2,\mathbb{Z})$.

Grupos de Veech

O *grupo de Veech* de um origami (reduzido) (h, v) é o subgrupo de $SL(2, \mathbb{Z})$ que o estabiliza.

Observação

Os grupos de Veech são subgrupos de índice finito de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Conforme vimos acima, o grupo de Veech de $\mathbb{T}^2$ é $SL(2, \mathbb{Z})$.

Exercício

Mostre que o grupo de Veech do origami $h = (1)(2, 3)$, $v = (1, 2)(3)$ em forma de L possui índice 3 em $SL(2, \mathbb{Z})$.

$SL(2,\mathbb{R})$-órbitas nos estratos

Um origami é um caso particular de *superfície de translação*, i.e., as superfícies obtidas colando por translações pares de lados de uma família finita de *polígonos*.

$SL(2,\mathbb{R})$-órbitas nos estratos

Um origami é um caso particular de *superfície de translação*, i.e., as superfícies obtidas colando por translações pares de lados de uma família finita de *polígonos*. Uma superfície de translação também possui singularidades cônicas ao redor das quais os ângulos totais são $2\pi(k_1+1)$, ..., $2\pi(k_\sigma+1)$ e, portanto, elas podem ser organizadas em *estratos* $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$.

O grupo $SL(2,\mathbb{R})$ age naturalmente em $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ (pois a ação de matrizes 2×2 respeita pares de lados identificados por transl.). Nesse contexto, as $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas dos origamis são *fechadas* e isomorfas ao fibrado tangente unitário de superfícies hiperbólicas.

$SL(2,\mathbb{R})$-órbitas nos estratos

Um origami é um caso particular de *superfície de translação*, i.e., as superfícies obtidas colando por translações pares de lados de uma família finita de *polígonos*. Uma superfície de translação também possui singularidades cônicas ao redor das quais os ângulos totais são $2\pi(k_1+1)$, ..., $2\pi(k_\sigma+1)$ e, portanto, elas podem ser organizadas em *estratos* $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$.

O grupo $SL(2,\mathbb{R})$ age naturalmente em $\mathcal{H}(k_1,\dots,k_\sigma)$ (pois a ação de matrizes 2×2 respeita pares de lados identificados por transl.). Nesse contexto, as $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas dos origamis são *fechadas* e isomorfas ao fibrado tangente unitário de superfícies hiperbólicas.

Mais precisamente, a $SL(2,\mathbb{R})$-órbita do origami $\mathcal{O}$ é isomorfa à $SL(2,\mathbb{R})/SL(\mathcal{O})$ onde $SL(\mathcal{O})\subset SL(2,\mathbb{Z})$ é o grupo de Veech de $\mathcal{O}$.

Curvas de Teichmüller

As $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas produzidas por origamis são ditas *curvas de Teichmüller aritméticas*, enquanto que as outras $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas são ditas *curvas de Teichmüller não-aritméticas*

Curvas de Teichmüller

As $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas produzidas por origamis são ditas *curvas de Teichmüller aritméticas*, enquanto que as outras $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas são ditas *curvas de Teichmüller não-aritméticas* (porque um teorema de Smillie garante que elas são isomorfas à $SL(2,\mathbb{R})/G$ onde G é uma *rede* de $SL(2,\mathbb{R})$ a qual *não* é comensurável à $SL(2,\mathbb{Z})$).

Curvas de Teichmüller

As $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas produzidas por origamis são ditas *curvas de Teichmüller aritméticas*, enquanto que as outras $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas são ditas *curvas de Teichmüller não-aritméticas* (porque um teorema de Smillie garante que elas são isomorfas à $SL(2,\mathbb{R})/G$ onde G é uma *rede* de $SL(2,\mathbb{R})$ a qual *não* é comensurável à $SL(2,\mathbb{Z})$).

O toro $\mathbb{T}^2$ gera a curva de Teichmüller $SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})$ associada à *curva modular* $\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$.

Curvas de Teichmüller

As $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas produzidas por origamis são ditas *curvas de Teichmüller aritméticas*, enquanto que as outras $SL(2,\mathbb{R})$-órbitas fechadas são ditas *curvas de Teichmüller não-aritméticas* (porque um teorema de Smillie garante que elas são isomorfas à $SL(2,\mathbb{R})/G$ onde G é uma *rede* de $SL(2,\mathbb{R})$ a qual *não* é comensurável à $SL(2,\mathbb{Z})$).

O toro $\mathbb{T}^2$ gera a curva de Teichmüller $SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})$ associada à *curva modular* $\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$. Em geral, como os grupos de Veech possuem índice finito em $SL(2,\mathbb{Z})$, as curvas de Teichmüller aritméticas são recobrimentos finitos da superfície modular.

Versão combinatória das curvas de Teichmüller aritméticas

Uma maneira combinatória de codificar uma curva de Teichmüller aritmética associada a um origami $\mathcal{O}$ consiste em olhar para o *grafo* cujos vértices são

$$\{\mathcal{O} = \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m\} = SL(2,\mathbb{Z}) \cdot \mathcal{O}$$

e cujas arestas conectam $\mathcal{O}_k$ e $\mathcal{O}_l$ sempre que $\mathcal{O}_k = T^{\pm 1}\mathcal{O}_l$ ou $\mathcal{O}_k = S^{\pm 1}\mathcal{O}_l$.

Versão combinatória das curvas de Teichmüller aritméticas

Uma maneira combinatória de codificar uma curva de Teichmüller aritmética associada a um origami $\mathcal{O}$ consiste em olhar para o *grafo* cujos vértices são

$$\{\mathcal{O}=\mathcal{O}_1,\dots,\mathcal{O}_m\}=SL(2,\mathbb{Z})\cdot\mathcal{O}$$

e cujas arestas conectam $\mathcal{O}_k$ e $\mathcal{O}_l$ sempre que $\mathcal{O}_k=T^{\pm 1}\mathcal{O}_l$ ou $\mathcal{O}_k=S^{\pm 1}\mathcal{O}_l$.

De fato, o grafo acima descreve as adjacências entre as células do ladrilhamento de $\mathbb{H}/SL(\mathcal{O})$ obtido levantando o domínio fundamental usual

$$\{(x,y)\in\mathbb{H}:|x|<1/2, x^2+y^2>1\}$$

para a curva modular.