united nations educational, scientific and cultural organization

international atomic energy agency

the
abdus salam
international centre for theoretical physics

SMR1321/2(a)

School and Workshop on Dynamical Systems

(30 July - 17 August 2001)

Appendix to

A quasilinear approximation for the three-dimensional Navier-Stokes system

Ya. Sinai
Department of Mathematics
Princeton University
Princeton, NJ 08544
U.S.A.

and

L.D. Landau Institute for Theoretical Physics
Russian Academy of Sciences
Kosygin St. 2
117940 Moscow
Russia

Основной результат для $N=2$ дает (1)

Теорема 1. Для любых ~~данных~~ начальных ~~данных~~ $k^{(1)}(0)\neq 0$, $k^{(2)}(0)\neq 0$, $v^{(1)}(0)$, $v^{(2)}(0)$, удовлетворяющих условию несжимаемости, решение $k^{(i)}(t)$, $v^{(i)}(t)$, $i=1,2$ системы (16) определено при всех $t>0$ и обладает следующими свойствами:

1) существуют ненулевые векторы $k^{(i)}(\infty)$, зависящие от начальных данных, такие, что
$$\lim_{t\to\infty} k^{(i)}(t) = k^{(i)}(\infty),\ i=1,2;$$

2) $$\lim_{t\to 0} v^{(i)}(t) = 0,\ i=1,2.$$

Доказательство. Мы видели, что векторное произведение $[k^{(1)}(t), k^{(2)}(t)]$ является инвариантом потока, определяемого системой (16), и, следовательно, длина этого вектора, которую мы обозначим через $J(t)=J$, является первым интегралом системы (16). Ясно, что $|k^{(1)}(t)||k^{(2)}(t)| \geq J$. (19)

В зависимости от значения J разобьем доказательство ~~на~~ на две части

I. $J\neq 0$. В этом случае векторы $k^{(1)}(t)$ и $k^{(2)}(t)$ линейно независимы

Используя систему (16) напишем уравнение для функции $V(t)=V^{(1)}(t)\,V^{(2)}(t)$. Мы получим, что
$$\frac{dV}{dt} = -(\nu|k^{(1)}|^2+\nu|k^{(2)}|^2)V - \left(\frac{d\ln|k^{(1)}|^2}{dt}+\frac{d\ln|k^{(2)}|^2}{dt}\right)V \quad (20)$$

(Здесь, как и далее, где это не может вызвать недоразумений, мы опускаем аргумент t у неизвестных функций.)

Легко видеть, что

$$V(t) = V(t_0)\frac{|K^{(1)}(t_0)|^2|K^{(2)}(t)|^2}{|K^{(1)}(t)|^2|K^{(2)}(t)|^2}e^{-\nu\int_{t_0}^{t}(|K^{(1)}(\tau)|^2+|K^{(2)}(\tau)|^2)d\tau} \quad (21)$$

Используя (19), получаем следующую оценку:

$$|V(t)| < \frac{|V(t_0)|\cdot|K^{(1)}(t_0)|^2|K^{(2)}(t_0)|^2}{J^2}e^{-\nu\int_{t_0}^{t}(|K^{(1)}(\tau)|^2+|K^{(2)}(\tau)|^2)d\tau} \quad (22)$$

Из (22), в частности, следует, что

$$\lim_{t\to\infty} V^{(2)}(t)\cdot V^{(1)}(t) = 0,$$

так как $|K^{(1)}(t)|^2+|K^{(2)}(t)|^2 \geq 2|K^{(1)}(t)||K^{(2)}(t)| \geq 2J$

Теперь запишем уравнение для $V^{(1)}$ ~~как~~ в виде

$$\frac{dV^{(1)}}{dt} = -\nu|K^{(1)}|^2 V^{(1)} - \frac{(K^{(1)},K^{(2)})}{|K^{(1)}|^2}V \quad (23)$$

Отсюда

$$V^{(1)}(t) = V^{(1)}(t_0)\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{(K^{(1)}(\tau),K^{(2)}(\tau))}{|K^{(1)}(\tau)|^2}e^{-\nu\int_{t_0}^{\tau}|K^{(2)}(x)|^2dx}d\tau\right)\times$$

$$\times\ e^{-\nu\int_{t_0}^{t}|K^{(1)}(\tau)|^2d\tau} \quad (24)$$

Так как $\left|\frac{(K^{(1)}(\tau),K^{(2)}(\tau))}{|K^{(1)}(\tau)|^2}\right| \leq \frac{|K^{(2)}(\tau)|^2}{|K^{(1)}(\tau)||K^{(2)}(\tau)|} \leq \frac{|K^{(2)}(\tau)|^2}{J}$,

мы получаем следующую оценку:

$$|V^{(1)}(t)| \leq |V^{(1)}(t_0)|\left(\frac{1}{\nu J}\left(1-e^{-\nu\int_{t_0}^{t}|K^{(2)}(\tau)|^2d\tau}\right)\right)e^{-\nu\int_{t_0}^{t}|K^{(1)}(\tau)|^2d\tau} \quad (25)$$

Аналогичным образом получаем для $V^{(2)}(t)$, что (3)

$$|V^{(2)}(t)| \le |V^{(2)}(t_0)| \left(\frac{1}{\sqrt{J}} \left(1 - e^{-\nu\int_{t_0}^{t} |K^{(1)}(\tau)|^2 d\tau}\right)\right) e^{-\nu\int_{t_0}^{t} |K^{(2)}(\tau)|^2 d\tau} \qquad (26)$$

Далее получаем для $i = 1, 2$, что

$$\frac{1}{|K^{(i)}(t)|^2} = \frac{|V^{(i)}(t)|}{|K^{(i)}(t)|^2 |V^{(i)}(t)|} \le \frac{1}{|K^{(i)}(t_0)|^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J}}. \qquad (27)$$

Так как $|K^{(1)}(t)||K^{(2)}(t)| > J$, из (27) следует, что существует такая постоянная A, зависящая от начальных данных, что

$$A^{-1} < |K^{(i)}(t)| < A, \quad i = 1, 2. \qquad (28)$$

Теперь заметим, что, по крайней мере, один из интегралов $I_1(t) = \int_{t_0}^{t} |K^{(1)}(\tau)|^2 d\tau$ или $I_2(t) = \int_{t_0}^{t} |K^{(2)}(\tau)|^2 d\tau$ расходится при $t \to \infty$. Предположим $\lim_{t\to\infty} I_1(t) = \infty$. Тогда $|K^{(1)}(t)|^2 V^{(1)}(t) = |K^{(1)}(t_0)|^2 V^{(1)}(t_0)\, e^{-\nu I_1(t)}$ стремится к 0 при $t \to 0$. Более того, из этого следует с помощью следующих простых оценок:

$$|K_i^{(2)}(t) - K_i^{(2)}(t_0)| \le \int_{t_0}^{t} \left|\frac{dK_i^{(2)}(\tau)}{d\tau}\right| d\tau \le \int_{t_0}^{t} |K^{(1)}(\tau)||V^{(1)}(\tau)|\, d\tau$$

$$\le A^{-3} \int_{t_0}^{t} |K^{(1)}(\tau)|^4 |V^{(1)}(\tau)|\, d\tau = A^{-1} \int_{t_0}^{t} |K^{(1)}(\tau)|^2 |K^{(1)}(t_0)|^2 |V^{(1)}(t_0)|\, e^{-\nu I_1(\tau)} d\tau$$

$$= \nu^{-1} A^{-3} |K^{(1)}(t_0)|^2 |V^{(1)}(t_0)| \left(1 - e^{-\nu I_1(t)}\right) \le \nu^{-1} A^{-3} |K^{(1)}(t_0)|^2 |V($$

что $\lim_{t\to 0} K_i^{(2)}(t) = K_i^{(2)}(\infty)$ существует для $i = 1, 2, 3$ и предельный вектор $K_i^{(2)}(\infty)$ отличен от нуля. Поэтому $\lim_{t\to\infty} I_2(t) = \infty$ и, значит, таким же образом можно доказать вектор $K^{(1)}(\infty)$ существует и отличен

При выводе (29)—(31) мы воспользовались тем, что вектор $C=[k^{(1)}(t), k^{(2)}(t)]$ ортогонален векторам $k^{(1)}(t), k^{(2)}(t)$. (4)

Решая систему двух уравнений (30) и (31) для $i=1,2$ мы найдем функции $\varphi^{(i)}(t)$ и $\psi^{(i)}(t)$, которые будут стремиться к нулю при $t\to\infty$. Это следует из того, что $\lim\limits_{t\to\infty} k^{(i)}(t) = k^{(i)}(\infty) \neq 0$ при каждом i и поэтому детерминант ~~этой~~ системы отграничен от нуля, а правые части уравнений ~~из~~ функции $V^{(i)}(t)$ или 0, которые стремятся к нулю при $t\to\infty$. Ясно, что при достаточно больших t существует такая постоянная $a>0$, что

$$\max(|\varphi^{(i)}(t)|, |\psi^{(i)}(t)|) < a\max|V^{(1)}(t)|, |V^{(2)}(t)|$$

Теперь напишем уравнения для составляющей $v_c^{(i)}(t)$ вдоль вектора $C=(C_1, C_2, C_3)$. Мы имеем

$$\begin{cases} \dfrac{dp^{(1)}(t)}{dt} = -\cancel{\varkappa}|k^{(1)}|^2 p^{(1)}(t) + p^{(2)}(t)V^{(1)} - \dfrac{\sum_{i=1}^{3} C_i k_i^{(1)}}{|k^{(1)}|^2}V_2V_1 \\ \dfrac{dp^{(2)}(t)}{dt} = -\cancel{\varkappa}|k^{(2)}|^2 p^{(2)}(t) + p^{(1)}(t)V^{(2)} - \dfrac{\sum_{i=1}^{3} C_i k_i^{(2)}}{|k^{(2)}|^2}V_2V_1 \end{cases} \quad (32)$$

Так как C ортогонален $k^{(i)}(t)$, в (32) можно отбросить члены, несодержащие $p^{(i)}(t)$, и мы получим следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dp^{(1)}(t)}{dt} = -\nu |K^{(1)}|^2 p^{(1)}(t) + p^{(2)}(t) V^{(1)} \\ \dfrac{dp^{(2)}(t)}{dt} = -\nu |K^{(2)}|^2 p^{(2)}(t) + p^{(1)}(t) V^{(2)} \end{cases} \quad (33)$$

Складывая оба уравнения системы (33) и учитывая при достаточно больших t $V^{(i)}(t)$ становятся сколь угодно малыми и $|K^{(i)}|$ отделены равномерно от нуля, легко показать, что если $p^{(i)}(t_0) > 0$, $i=1,2$, при достаточно большом t_0, то $p^{(1)}(t) + p^{(2)}(t)$ стремится к нулю при $t \to 0$ и, значит, каждое $p^{(i)}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В самом деле, при достаточно большом t_0

$$|K^{(i)}(t)| > \frac{1}{2}|K^{(i)}(\infty)|, \; i=1,2. \text{ Тогда}$$

либо $p^{(1)}(t) + p^{(2)}(t) < \dfrac{4 \max(|V^{(1)}(t)|, V^{(2)}(t)|) \cdot 4}{\nu \min(|K^{(1)}(\infty)|^2, |K^{(2)}(\infty)|^2)}$,

либо $\dfrac{d \ln |p_1 + p_2|}{dt} < -\frac{1}{4} \min(|K^{(1)}(\infty)|^2, |K^{(2)}(\infty)|^2)$

В случае, когда $p^{(1)}(t_0)$ и $p^{(2)}(t_0)$ имеют разные знаки, вместо суммы $p^{(i)}(t)$ нужно рассмотреть их разность. Если $p^{(i)}(t)$ обе отрицательны, нужно также рассмотреть их сумму от нуля.

Если же предположим, что $\lim_{t\to\infty} I_e(t) = \infty$, то доказательство получается перестановкой индексов 1 и 2.

Так как $[K^{(1)}(t), K^{(2)}(t)] \neq 0$ и не зависит от t, $[K^{(1)}(\infty), K^{(2)}(\infty)] = C \neq 0$. Следовательно, векторы $K^{(1)}(\infty)$ и $K^{(2)}(\infty)$ линейно независимы.

Выберем в качестве базиса в R^3 векторы $(K^{(1)}(t); K^{(2)}(t), C)$ при каждом t, а также предельный базис $(K^{(1)}(\infty), K^{(2)}(\infty), C)$, и разложим векторы $v^{(i)}(t)$ по этим базисам в каждый момент t:

$$v^{(i)}(t) = C p^{(i)}(t) + K^{(1)}(t) q^{(i)}(t) + K^{(2)}(t)\, r^{(i)}(t)$$

и

$$v^{(i)}(t) = C p^{(i)}_{\infty}(t) + K^{(1)}(\infty) q^{(i)}_{\infty}(t) + K^{(2)}(\infty)\, r^{(i)}_{\infty}(t), \quad i = 1,2$$

Умножая эти равенства на каждый из векторов $C, K^{(1)}(t), K^{(2)}(t)$ и $K^{(1)}(\infty), K^{(2)}(\infty)$, мы получим следующие уравнения:

$$(v^{(i)}(t), C) = p^{(i)}(t)|C|^2 = p^{(i)}_{\infty}(t)|C|^2 \qquad (29)$$

$$\cancel{(v^{(i)}(t), K^{(1)}(t)) = q^{(i)}(t), \quad (v^{(i)}(t), K^{(2)}(t)) = r^{(i)}(t)}$$

$$(v^{(i)}(t), K^{(1)}(t)) = |K^{(1)}(t)|^2 q^{(i)}(t) + (K^{(1)}(t), K^{(2)}(t))\, r^{(i)}(t) = \begin{cases} 0 & i=1 \\ V^{(2)}(t) & i=2 \end{cases} \qquad (30)$$

$$(v^{(i)}(t), K^{(2)}(t)) = (K^{(1)}(t), K^{(2)}(t))\, q^{(i)}(t) + |K^{(2)}(t)|^2 r^{(i)}(t) = \begin{cases} V^{(1)}(t) & i=1 \\ 0 & i=2 \end{cases} \qquad (31)$$

II $[k^{(1)}(t), k^{(2)}(t)] = 0$ (7)

В этом случае векторы $k^{(1)}(t)$ и $k^{(2)}(t)$ пропорциональны друг другу: $k^{(2)}(t) = a(t)\, k^{(1)}(t)$, где $a(t)$ - некоторая функция от t. ~~Используя этот факт, легко доказать теорему.~~

Тогда $V^{(1)}(t) = (k^{(2)}(t), v^{(1)}(t)) = a(t)\,(k^{(1)}(t), v^{(1)}(t)) = 0$ в силу условия несжимаемости. Следовательно,

$$\frac{dk_i^{(2)}(t)}{dt} = k_i^{(1)}(t)\, V^{(1)}(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad k_i^{(2)}(t) = k_i^{(2)}(0),\ i = 1,2,3.$$

Аналогично получаем, что $V^{(2)}(t) = 0$ и $k_i^{(1)}(t) = k_i^{(1)}(0)$ для $i = 1,2,3$

Легко видеть, что в этом случае для $i = 1,2$

$$v^{(i)}(t) = v^{(i)}(0)\, e^{-\nu |k^{(i)}(0)|^2 t}$$

Так как по условию теоремы $k^{(i)}(0) \neq 0$, $i = 1,2$,

$$\lim_{t \to \infty} v^{(i)}(t) = 0.$$

Теорема доказана