



INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION



INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
34100 TRIESTE (ITALY) - P.O.B. 586 - MIRAMARE - STRADA COSTIERA 11 - TELEPHONES: 224281/2/3/4/5-6
CABLE: CENTRATOM - TELEX 460392-I

SMR/104-28

COLLEGE ON SOIL PHYSICS

19 September - 7 October 1983

SPATIAL VARIABILITY OF SOIL PHYSICAL PROPERTIES

G. VACHAUD

Institut de Mécanique
USMG
B.P. 53X
38041 Grenoble Cedex
France

These are preliminary lecture notes, intended only for distribution to participants.
For extra copies are available from Room 230.

VARIABILITE SPATIALE

(Méthodes d'analyse)

1. Analyse statistique "classique"

⇒ variabilité exprimée par μ, σ^2, CV
(lois de distribution).

2. Analyse "geostatistique"

⇒ structure spatiale.

3. Analyse par la théorie des facteurs d'échelle. (pr. hydrodynamiques)

⇒ variabilité décrite par 1 seul paramètre

⇒ modélisation déterministe / stochastique
des transferts.

ANALYSE STATISTIQUE CLASSIQUE

But :

Soit N observations d'une v.o. $Z: (z_1, z_2, \dots, z_N)$

⇒ Résumer N valeurs par quelques
caractéristiques simples :

- valeur moyenne μ
- variance σ^2 } → $C.V. = \frac{\sigma}{\mu}$

Moyens :

loi de distribution des z_i .

examen visuel { . histogramme des classes
tests d'ajustement { . fréquences cumulées.

Compilation de résultats ⇒

loi normale : $f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$

(variables d'état, ρ_d , texture)

loi log-normale : $f(z) = \frac{1}{z\sigma_{\ln}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln z - \mu_{\ln}}{\sigma_{\ln}}\right)^2\right\}$

(paramètres des transferts)

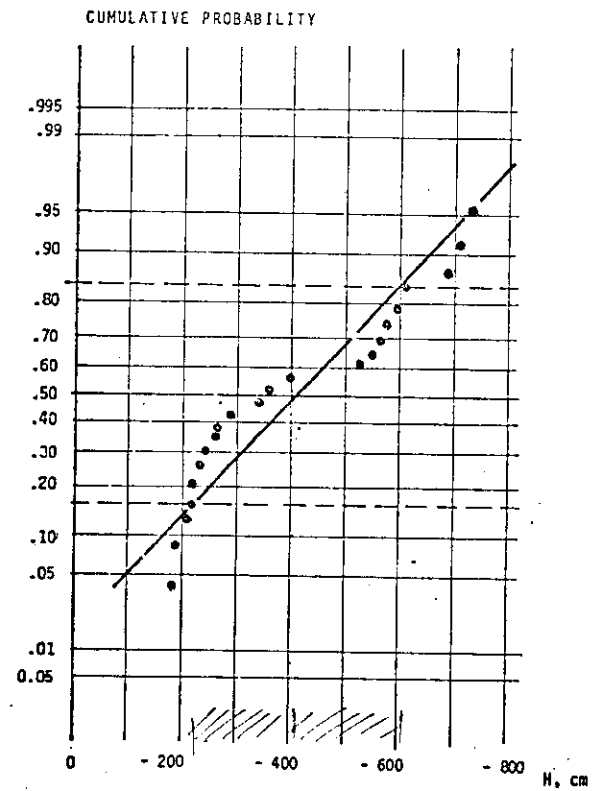
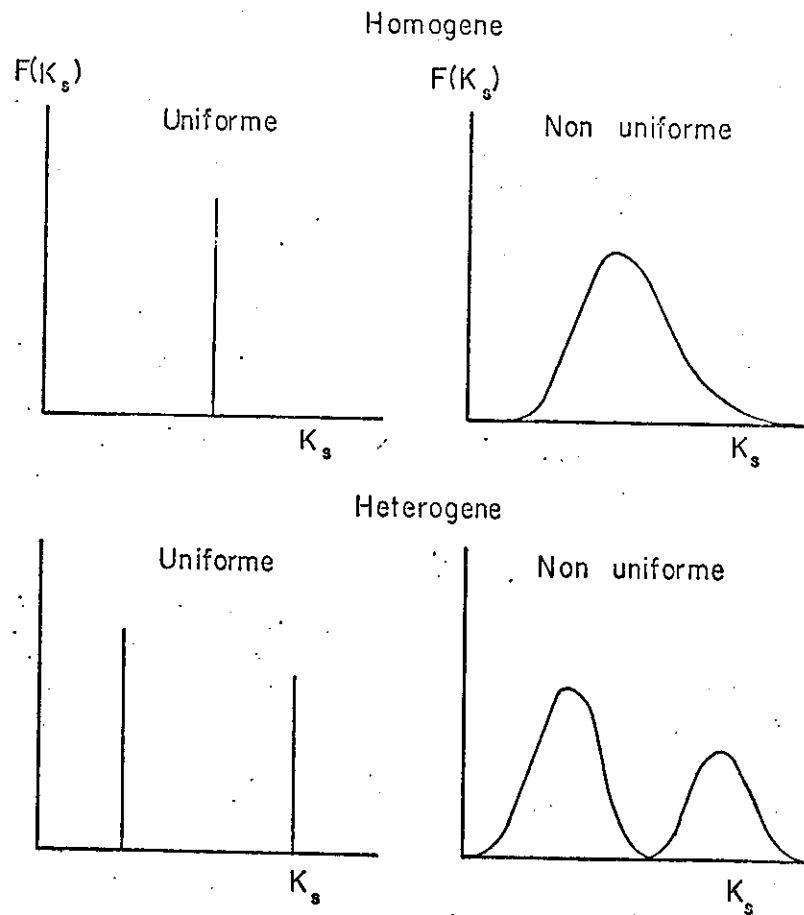
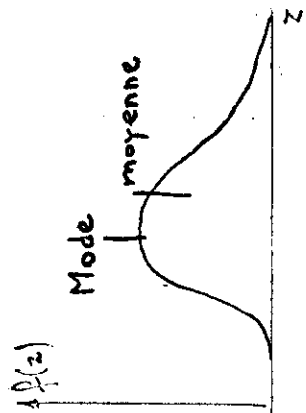
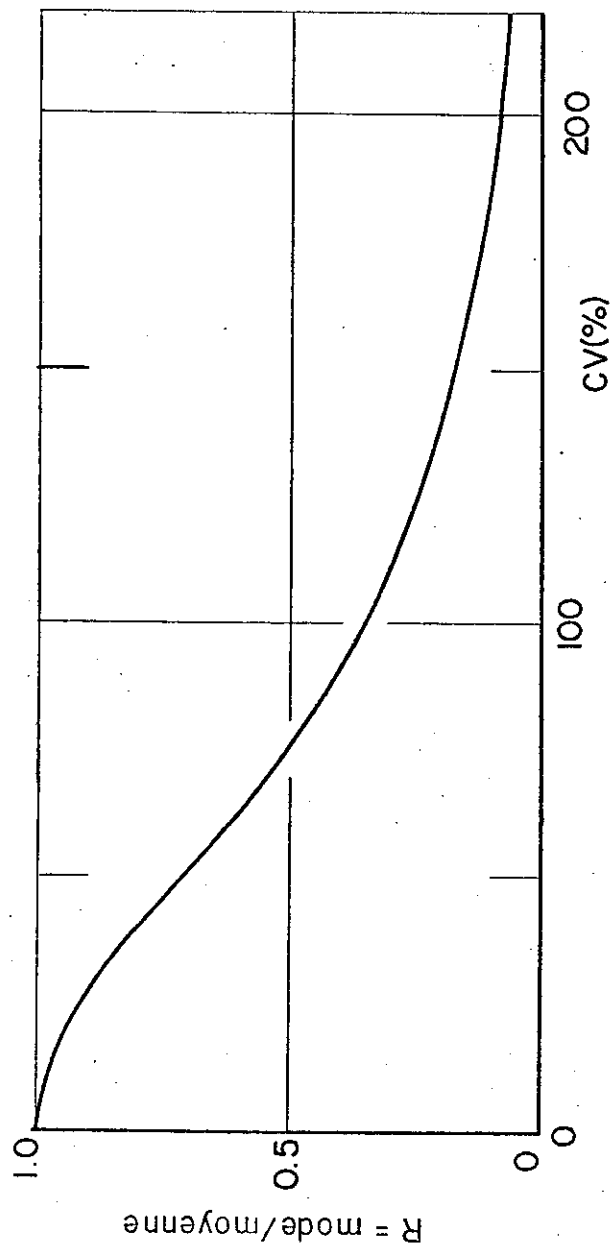


FIG.5 - Cumulative distribution of probability for 22 hydraulic head measurements (tensiometer reading) obtained the same day (Nov. 27, 1980), same depth, under a uniform cultivar of rainfed rice at BOUAKE, Ivory Coast. The continuous line corresponds to a normal distribution with a mean of - 405.6 cm and a standard deviation of ± 191.7 cm. (from KALINS et al, 1981)



$$R = \frac{\text{mode}}{\text{moyenne}} = \frac{1}{(1 + CV^2)^{3/4}}$$

(for log-normal)



- LAW OF DISTRIBUTION -

Parameters	cumulative frequency distribution	KS and CVM tests	W- test
clay + silt (%)	LN	LN	LN (Pr > 50%)
I_{60} (cm)	N/LN	N/LN	N (Pr > 50%)
"	LN	-	-
S (cm hr ^{-1/2})	N/LN	N/LN	N (Pr > 95%)
"	LN	LN	LN (Pr = 50%)
A (cm hr ⁻¹)	N/LN	N/LN	N (Pr > 50%)
"	LN	LN	LN (Pr = 50%)
Scaling Factor $I(t)$	N/LN	N/LN	N (Pr > 98%)
"	LN	-	-
Scaling Factor $h(t)$	N/LN	N/LN	LN (Pr > 50%)
"	LN	-	-
"	LN	-	-
Scaling factor $k(t)$	N/LN	N/LN	LN (Pr > 50%)
"	LN	-	-
"	LN	-	-

LN: log-normal
N: normal

Sharmal et al
(1980)

Sharmal et al
(1980)

Sharmal et al
(1980)

Sharmal et al
(1980)

Warrick et al (1977)

Simmons et al (1979)

Russo, Bresler (1980)

Simmons et al
Russo - Bresler.

- SPATIAL VARIABILITY -

Parameters	μ	σ	CV
clay + silt (%)	7.71	2.13	0.277
I_{60} (cm)	24.22	4.06	0.168
"	6.62	0.69	0.104
S (cm hr ^{-1/2})	9.35	3.20	0.342
"	4.95	2.44	0.494
A (cm hr ⁻¹)	14.32	3.78	0.264
"	1.46	0.88	0.603
Scaling factor $I(t)$	1.01	0.12	0.12
"	0.96	0.58	0.60
Scaling factor $h(\theta)$	1.00	0.29	0.29
"	1.00	0.54	0.54
"	1.00	0.43	0.43
"	0.91	0.81	0.96
"	1.00	0.31	0.31
Scaling factor $k(\theta)$	1.00	0.47	0.47
"	1.06	1.81	1.70
"	1.00	0.24	0.24
"	1.00	0.54	0.54

Sharma et al (198)

Sharma et al

Sharma et al

Sharma et al

Warrick et al (1977)

"

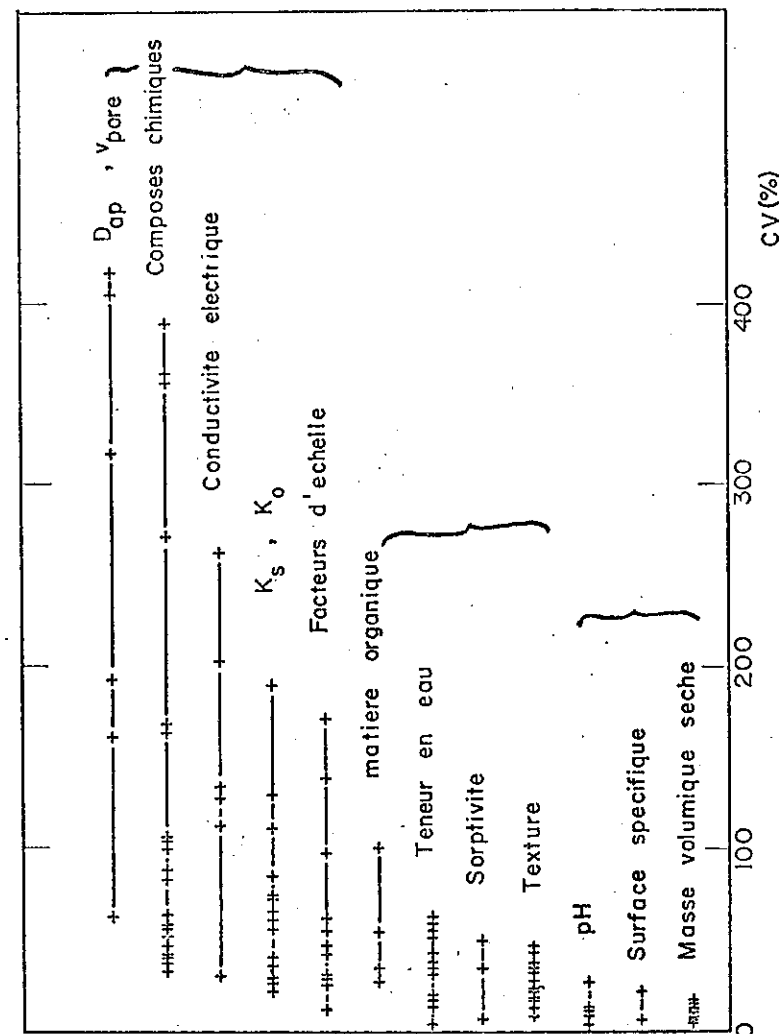
Simmons et al (1979)

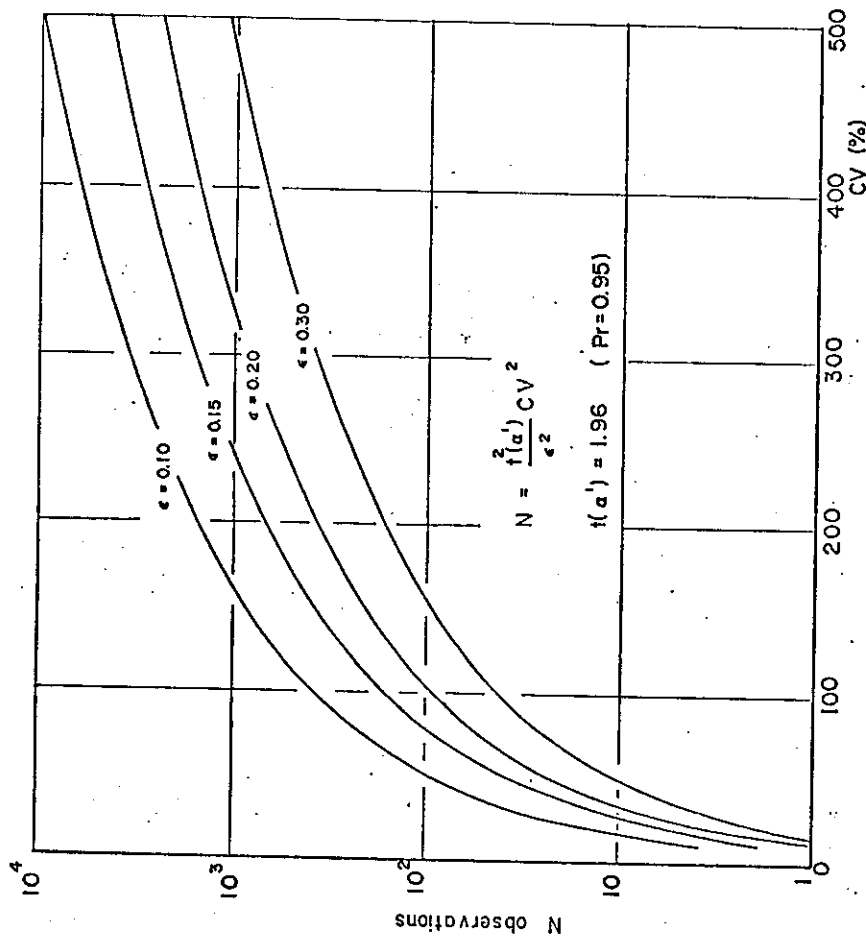
Russo-Bresler (1980)

Warrick et al (1977)

Simmons et al (1979)

Russo-Bresler (1980)





9

Conséquences :

1) Ignorer la loi de distribution $\Rightarrow$ résultats erronés sur valeurs moyennes et variance de la population.

2) Confondre mode et moyenne pour une loi log. normale $\Rightarrow$ Erreurs = f (C.V.)

3) Échantillonnage.

si N observations indépendantes :

théorème central limite $\Rightarrow$

observations nécessaires $\rightarrow N = t^2(w') \cdot \frac{CV^2}{\epsilon^2}$

v. Student.

ϵ^2 $\leftarrow$ erreur relative souhaitée sur la moyenne.

4) Recherche de sites représentatifs de comportements spécifiques: (moyen, modal, extrêmes, $\pm \sigma$; $\pm 2\sigma$)

STATIONNARITE DANS LE TEMPS ?

5) terminologie.

10

ANALYSE GEOSTATISTIQUE

But :

N observations dans un domaine fini
peuvent ne pas être spatialement indépendants
⇒ recherche d'éventuelles structures spatiales

Moyens :

1) méthodes de l'analyse du signal.

hyp. stationnarité d'ordre 2 :

$$E\{Z(r)\} = \mu \quad \forall r$$

. Autocovariance : $\text{cov}\{Z(r), Z(r+h)\}$ existe
et ne dépend pas de r.

$$\Rightarrow \rho(h) = \frac{\text{cov}\{Z(r), Z(r+h)\}}{\sigma^2}$$

$\rho(h)$: fonction d'autocorrélation $\begin{cases} \nearrow \text{corrélogramme} \\ \searrow \text{longueur d'autocorrél.} \end{cases}$

11

2) méthodes géostatistiques.

$Z(r)$ = variable régionalisée.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{var}\{Z(r) - Z(r+h)\}$$

$\gamma(h)$: Semi-variogramme.

Remarque : var. peut ne pas être finie
(hypothèse intrinsèque).

$$\text{Si var. finie} \Rightarrow \gamma(h) = \sigma^2 \{1 - \rho(h)\}$$

Conséquences :

1) méthodes d'interpolation spatiale optimales.
KRIGEAGE.

2) Recherche de corrélation simple entre 2
variables spatialement structurée est biaisée
⇒ "cross-variogram"

$$\gamma_{12}(h) = \frac{1}{2} E \left\{ [Z_1(r+h) - Z_1(r)] [Z_2(r+h) - Z_2(r)] \right\}$$

COKRIGEAGE

3) échantillonnage.

si N observations sont indépendantes

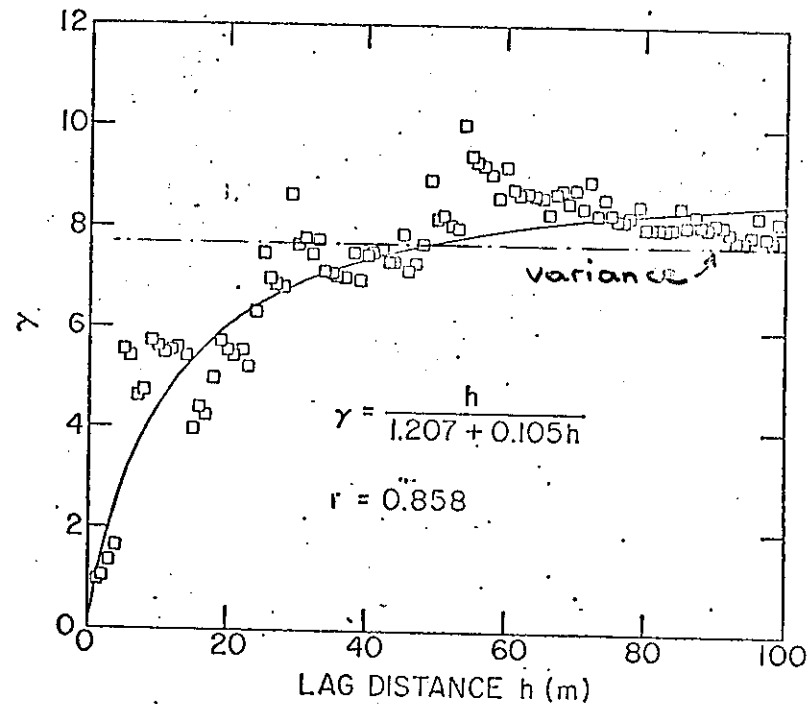
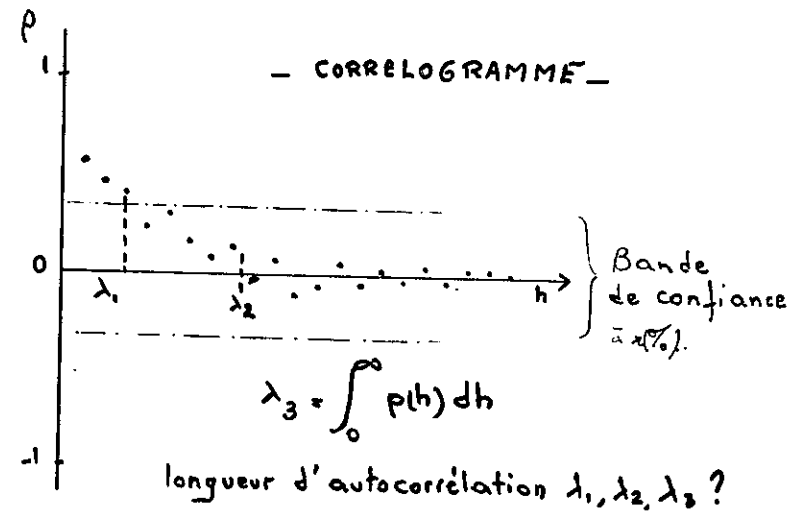


Fig. 15 - Semivariogram function calculated for 1200 measured values of the steady-state infiltration rate. The Sample Variance is $7.77 (\text{mm.h}^{-1})^2$, (by courtesy of Vieira et al. (133)).



- analyse spectrale (distribution de la variance en fonction de la fréquence spatiale.)

$$S(f) = \Delta r \left\{ \rho(0) + 2 \sum_{k=1}^m \rho(k) \cos(2\pi f \cdot k \Delta r) \right\}$$

densité spectrale

$$f = \frac{k}{2m \Delta r} \quad , \quad \text{fréquence.}$$

→ recherche de périodicité.

→ tests d'ajustement de $\rho(h)$ à des processus stochastiques théoriques.

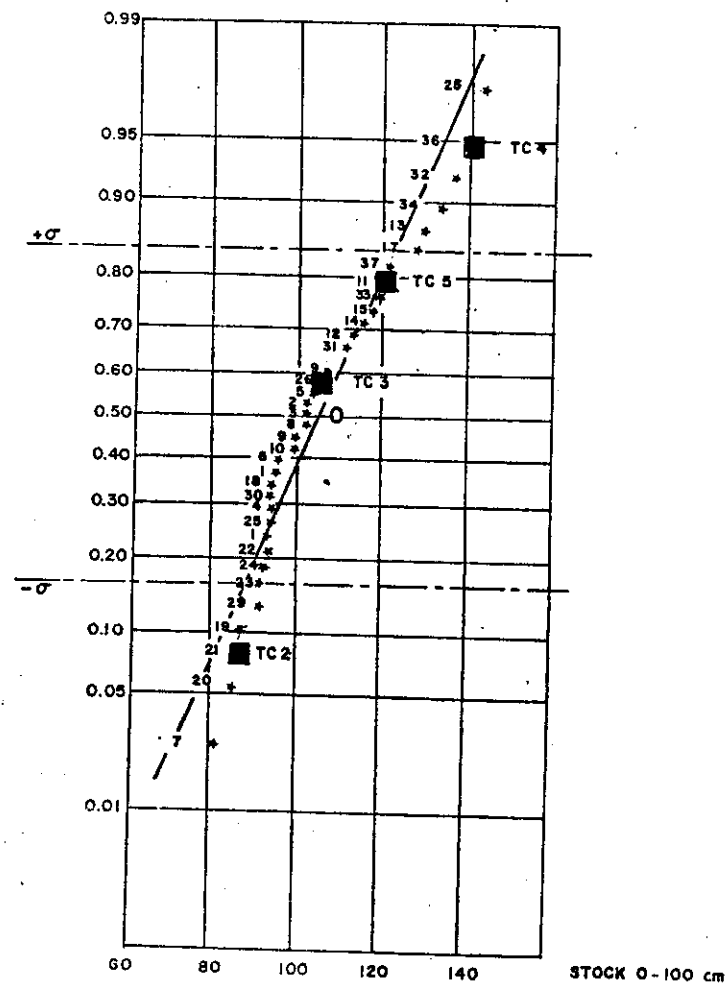
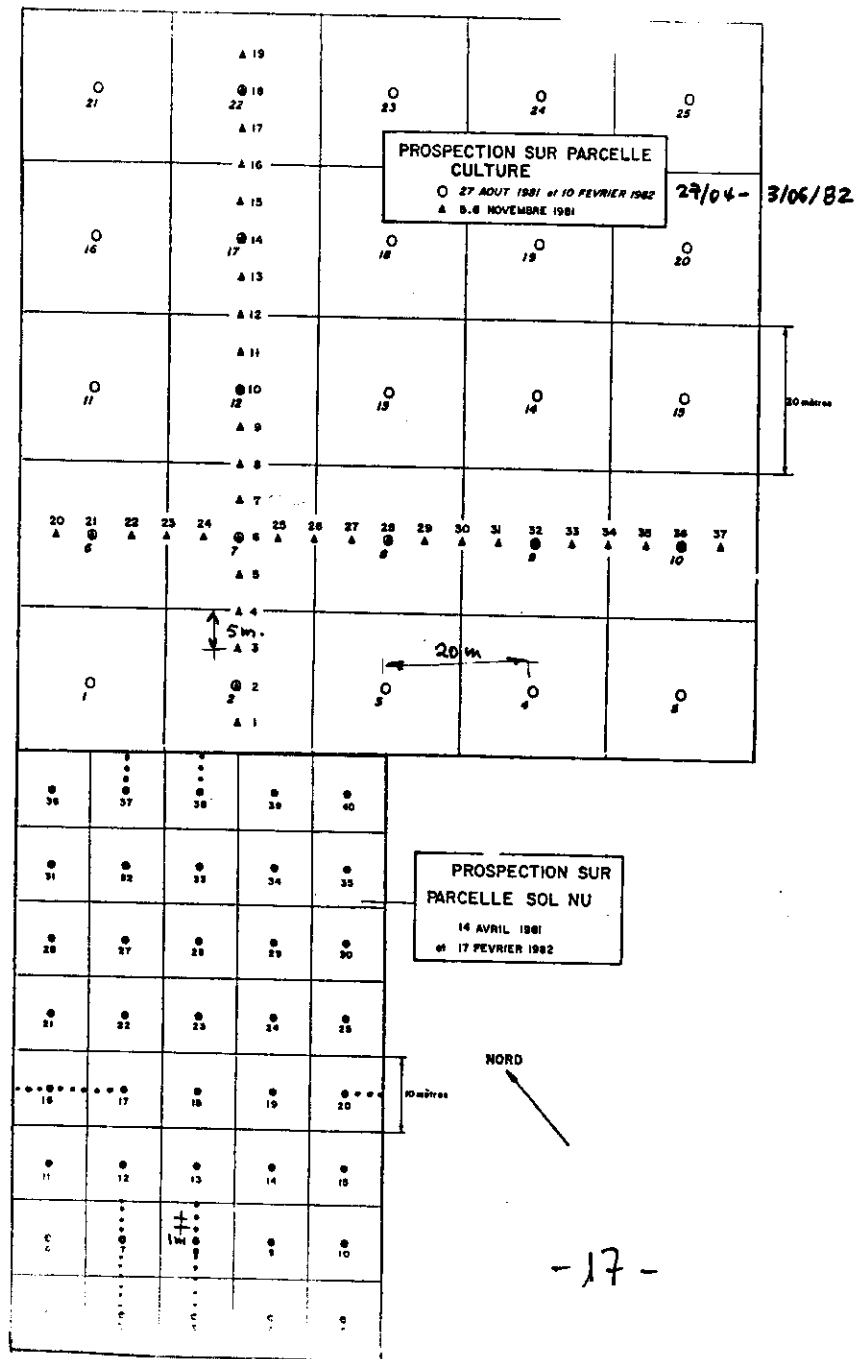


TABLEAU 1

ANALYSE DE PAIRES ENTRE MESURES DE STOCK
SUR 0-1 m ENTRE FEVRIER et JUIN 1982
SUR LA GRILLE

n° site	Stock février	Stock juin	RHO DE SPEARMAN	
	X(I)	Y(I)	I RANG DE X(I)	RANG DE Y(I)
1	195.8000	119.7000	1	2.0000
2	227.5000	118.4000	2	11.0000
3	237.4000	127.5000	3	15.0000
4	218.8000	128.0000	4	6.0000
5	284.8000	131.1000	5	23.0000
6	221.4000	98.2000	6	7.0000
7	236.8000	140.2000	7	14.0000
8	231.4000	119.4000	8	12.0000
9	272.0000	149.8000	9	21.0000
10	304.5000	173.1000	10	24.0000
11	225.0000	118.7000	11	9.0000
12	210.9000	124.5000	12	4.0000
13	257.9000	138.9000	13	19.0000
14	225.3000	143.4000	14	10.0000
15	216.7000	119.7000	15	5.0000
16	267.5000	139.5000	16	20.0000
17	238.1000	142.0000	17	16.0000
18	205.1000	105.6000	18	3.0000
19	223.7000	123.5000	19	8.0000
20	275.8000	137.9000	20	22.0000
21	188.2000	98.9000	21	1.0000
22	243.6000	127.2000	22	17.0000
23	233.0000	127.7000	23	13.0000
24	254.1000	132.2000	24	18.0000
			SOMME DES DIFF DE RANG AU CARRE=	
			504.0000	

MORNAG

19

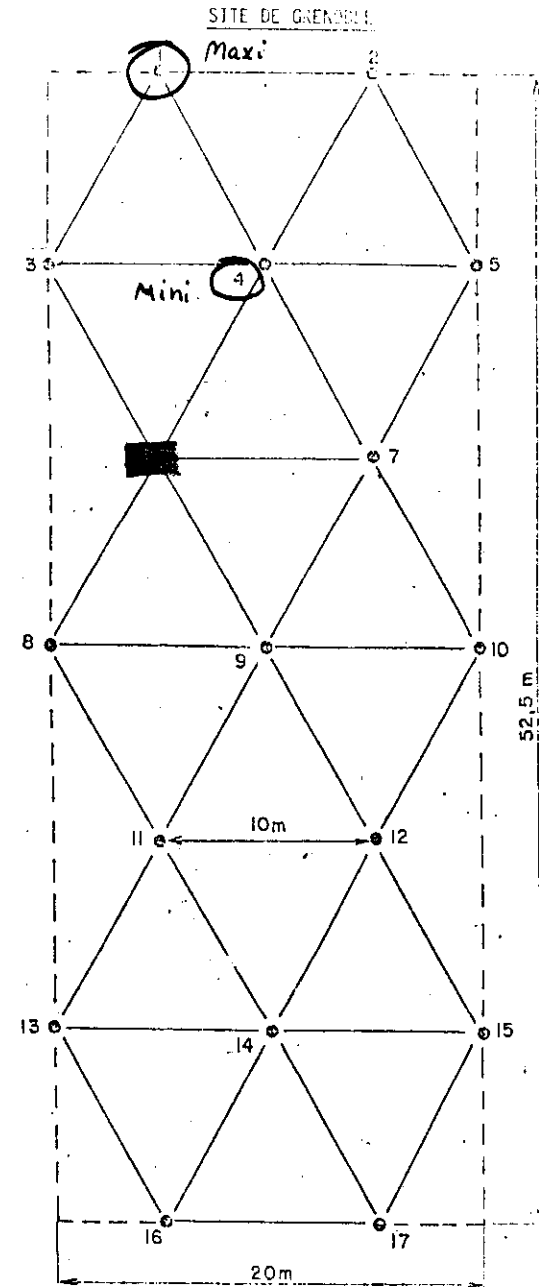


FIG. 2

20

le 1^{er} mètre pour chacun
le stock moyen obtenu sur 21 dates de mesures

	TUBE	DI	SDI	DELI
Maxi	1	48,14	49,17	1,04
	2	-10,41	11,72	1,31
	3	31,91	32,74	0,83
Mini	4	-59,30	59,92	0,63
	5	20,27	21,27	1,00
	6	-17,78	12,70	4,92
	7	-14,59	19,36	4,77
	8	0,66	6,77	6,11
	9	-5,09	7,42	2,33
	10	-23,96	25,91	1,96
	11	15,05	15,84	0,78
	12	-31,77	32,42	0,65
	13	-7,41	11,57	4,15
	14	27,64	28,84	1,20
	15	10,17	10,56	0,39
	16	-7,31	11,66	4,35
	17			

DI = moyenne de l'écart (mm)
SDI = écart type par rapport à la moyenne des écarts (mm)
DELI = dispersion autour de la moyenne des écarts

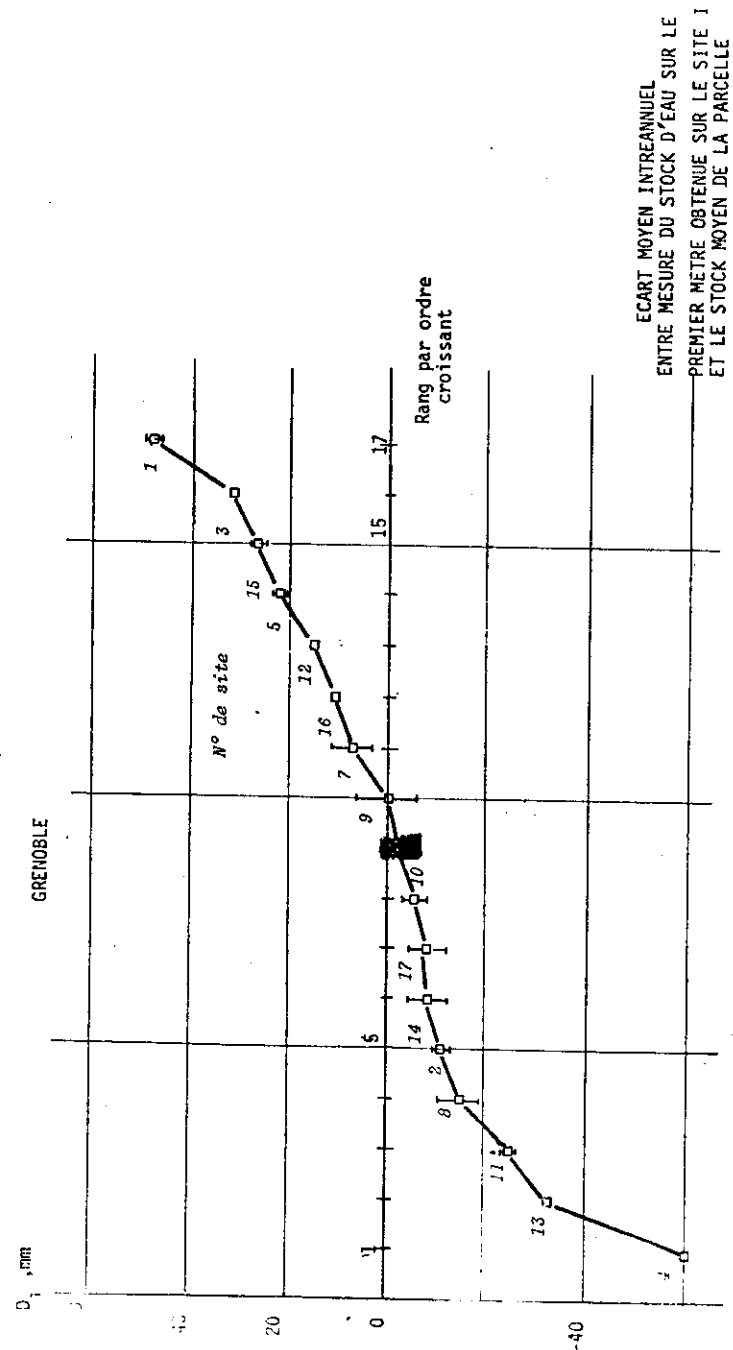
TABLEAU 3

Valeur du coefficient de corrélation de rang RHO de Spearman entre les 17 sites de mesures pour l'estimation du stock sur le 1^{er} mètre entre 7 dates représentatives

Date	25/08/81	16/07/82	27/05/82	15/06/82	21/03/82	2/12/82	7/09/82
Stock moyen		347	367	386	416	424	
25/08/81							
16/07/82							
27/05/82		0,841					
15/06/82		0,853	0,953				
21/03/83		0,819	0,931	0,904			
2/12/82		0,755	0,833	0,873	0,953		
7/09/82	0,860	0,863	0,909	0,929	0,966	0,941	

SITE DE GRENOBLE

21



22

FIG. 3

SCALING THEORY

Basic assumptions.

- similar media concept.
Similar media differ only in the scale of their internal microscopic geometries. (λ)
 $\Rightarrow$ porosities, pore and particle size distributions are equivalent.

- invariance of σ .

$$h_i \lambda_i = \text{cst} = h^* \lambda^* \Rightarrow h_i = \frac{1}{\alpha_i} h^*$$

- invariance of μ .

$$\frac{k_i}{\lambda_i^2} = \text{cst} = \frac{k^*}{\lambda^{*2}} \Rightarrow k_i = \alpha_i^2 k^*$$

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda^*} \text{ scale factor at location } i.$$

h^*, k^* reduced (mean scaled)
hydraulic property, invariant within locations.

generalization

$$w^* = \alpha_i^b w \quad \begin{cases} b=1 & \text{water pressure} \\ b=-2 & \text{conductivity, A-parameter} \\ b=-1 & \text{capillary diffusivity} \\ b=-1/2 & \text{Sorptivity} \end{cases}$$

-23-

Example.

23 infiltration tests on $S = 0.95$ ha.

$$\text{Experimental data} \quad \begin{cases} \Rightarrow I_i = f(t) \text{ at 23 locations} \\ \Rightarrow h_i = g(\theta) \text{ at 23 locations, one depth} \\ \Rightarrow k_i = k(\theta) \text{ at 4 locations, 4 depths} \end{cases}$$

Results: - scale factors were log-normally distributed

$$\mu_\alpha = 1 ; \sigma_\alpha^2 = 0.321$$

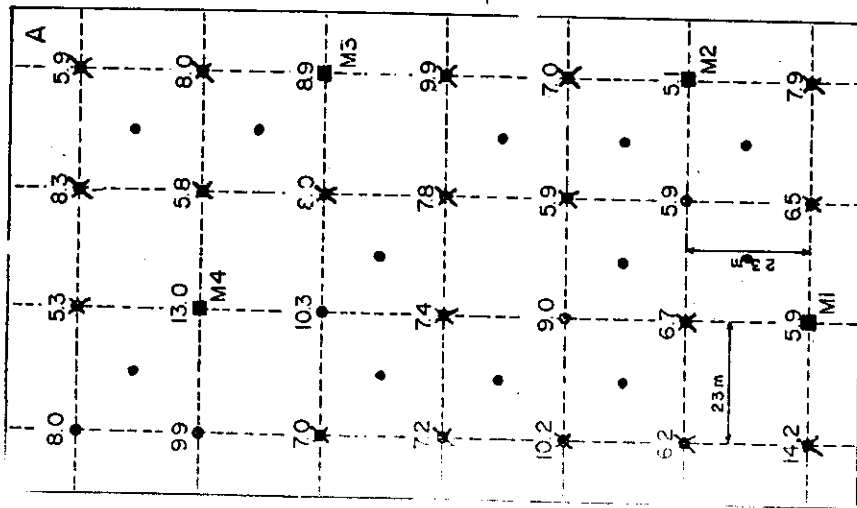
- test of similarity:

$$\alpha_k = 0.972 \alpha_h \quad (r = 0.92)$$

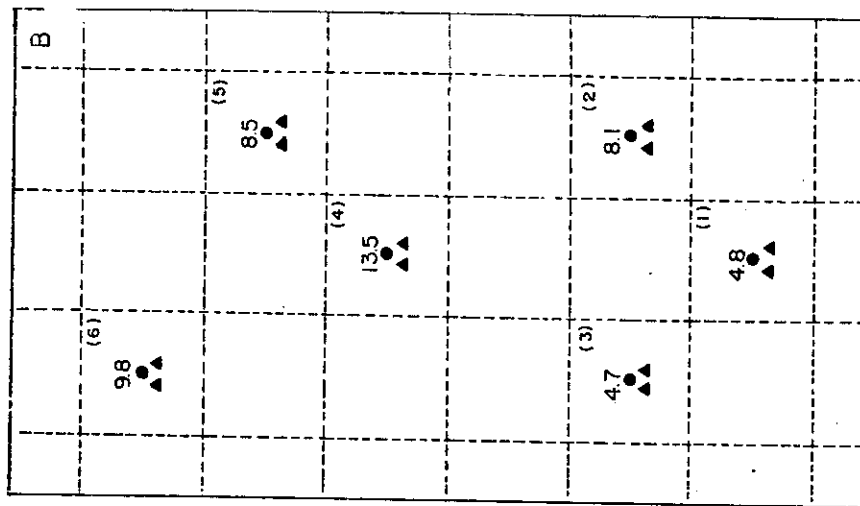
$$\alpha_k = 1.04 \alpha_h \quad (r = 0.97) \text{ Simmons et al (1979)}$$

$$\alpha_k = 1.06 \alpha_h \quad (r = 0.93) \text{ Russo-Bresler (1980)}$$

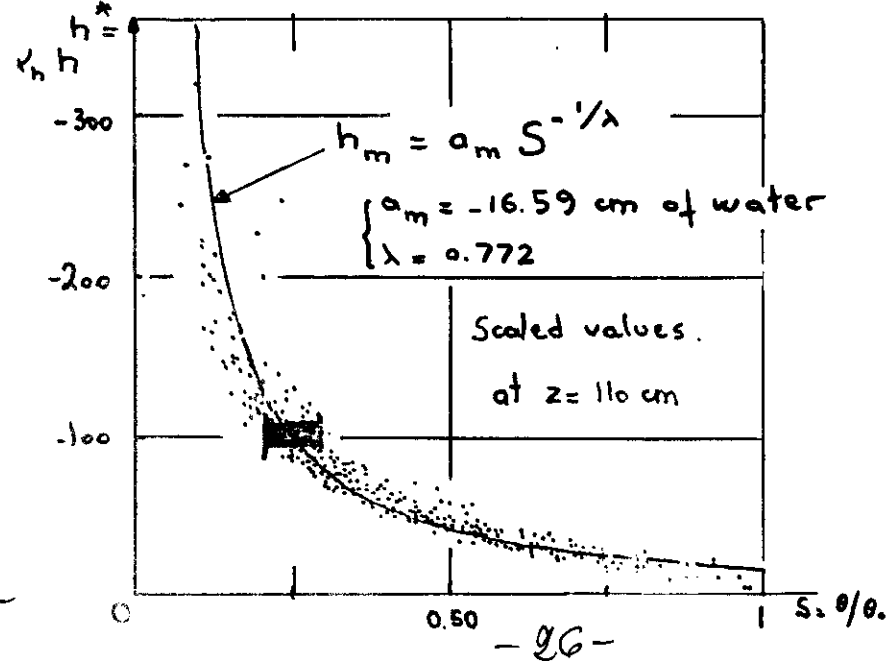
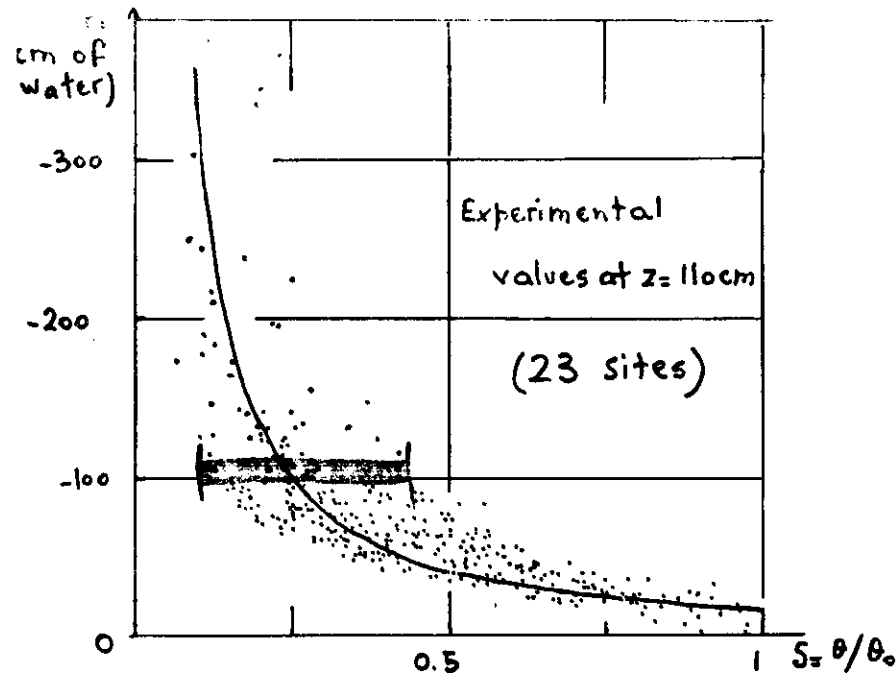
BARE SOIL

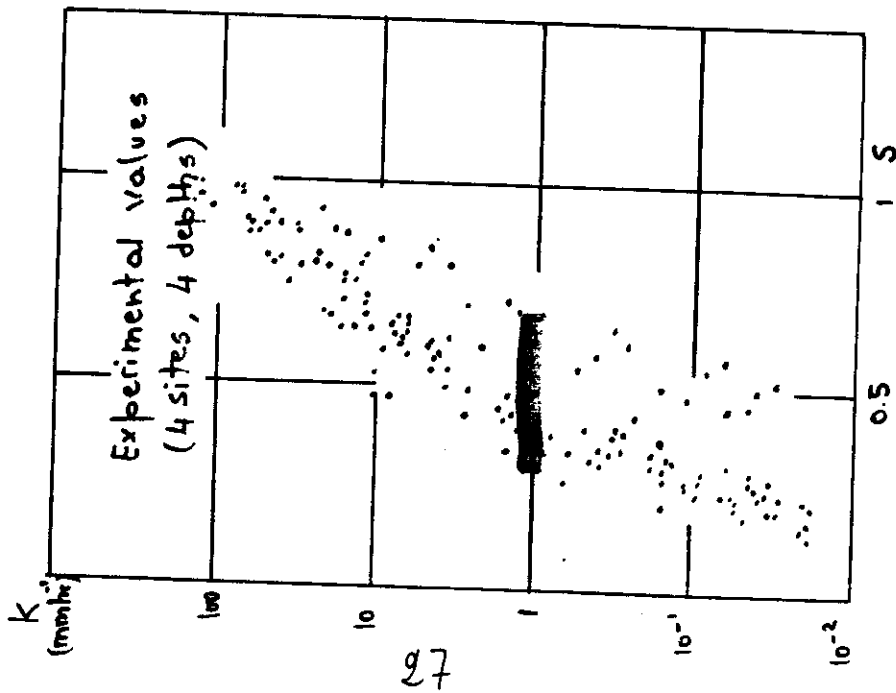
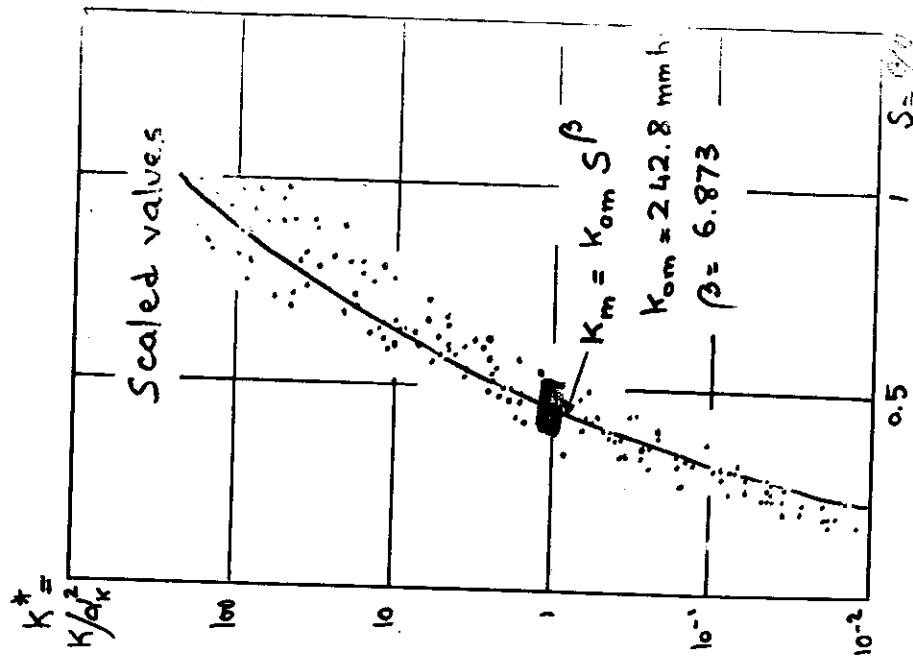


GROUNDWATS



A. CARACTERIZATION DU SOL
(Octobre 1978 - Mai 1979)
● infiltration sites
● Taux moyen d'éléments fins
($< 20 \mu m$) sur 0-120 cm
■ Monolithe 1.5x1.5m avec tube d'accès
neutronique 0-350cm
Tensiomètres à 10, 20, 30, 40, 50, 60,
70, 80, 100, 130 et 150 cm
B. SUIVI HYDRIQUE SOUS
(Juillet - Octobre 1979)
● Tube d'accès neutronique 0-250cm
avec four moyen d'éléments fins
($< 20 \mu m$) sur 0-120 cm
▲ Tensiomètres à 100 et 120 cm
(Imbernon, 1981)





FLUXES AT $Z = 110 \text{ cm}$. (23 sites)

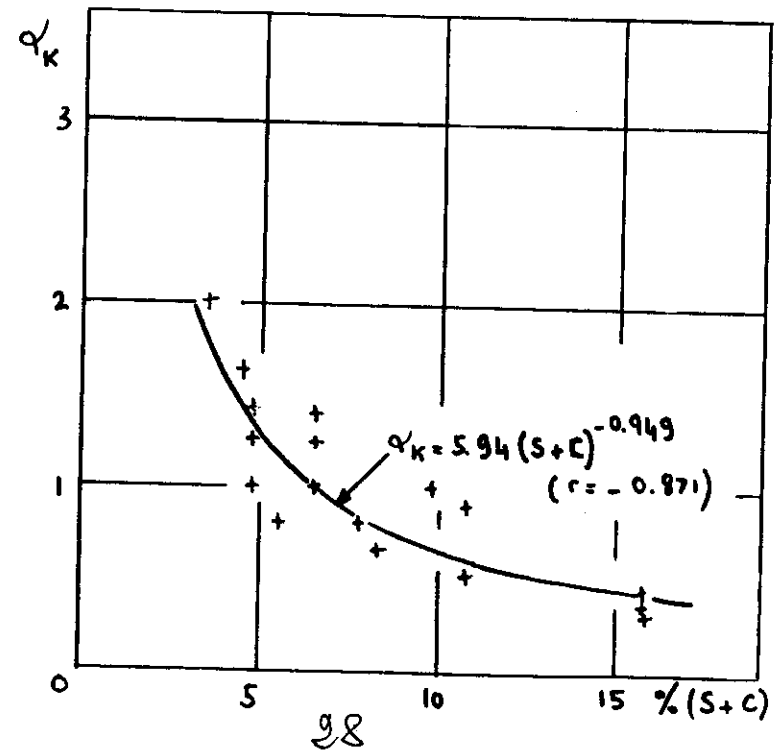
Darcy's law $\Rightarrow$

$$q_i = -K_i(\theta_w) \cdot \frac{dh}{dz} \approx \text{calculated by } \frac{H_{120} - H_{140}}{20}$$

Estimated by:

$$K_i = \alpha_K^2 K_{em} \left(\frac{\theta}{\theta_c} \right)^{1/2}$$

↑ estimated by $\alpha_K = f(S + C)$



II. MODELISATION

1. Conceptuelle.

Eqs Darcy + Continuité

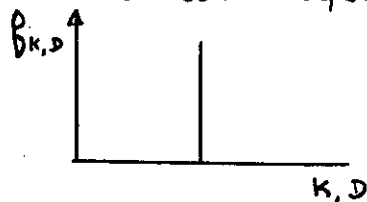
$$\Rightarrow \text{Eq. Richards: } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ K(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right\} \quad (1)$$

ou

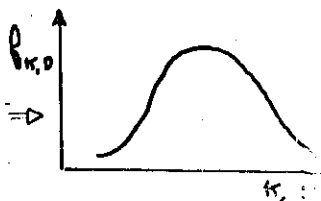
$$\Rightarrow \text{Eq. Fokker-Planck: } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\} - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (2)$$

+ C. initiales et aux limites.

$\Rightarrow \theta(z, t)$ ou $h(z, t)$ dans tout le domaine
si le milieu est uniforme et homogène.



En fait, le sol est non uniforme $\Rightarrow$
29



Conséquences :

1) Etude de la variabilité des paramètres hydrodynamiques $\Leftrightarrow$ Etude de la variabilité des α_i .

2) Intégration de l'équation des transferts

$\Rightarrow$ solutions stochastiques :

$$Y = g(\alpha_i, \text{paramètres})$$

$\uparrow$ v.a.

$$a) E\{Y\} = g(\mu_\alpha) + \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha^2} \right|_{\mu_\alpha} \cdot \frac{\sigma_\alpha^2}{2}$$

$$E\{Y\} = \underbrace{g(\mu_\alpha)}_{m. \text{ déterministe}} \left\{ 1 + \underbrace{\varepsilon_Y}_{\text{écart}} \right\} \text{ avec } \varepsilon_Y = \frac{1}{g(\mu_\alpha)} \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha^2} \right|_{\mu_\alpha} \cdot \frac{\sigma_\alpha^2}{2}$$

$$b) \text{var}(Y) = \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha^2} \right|_{\mu_\alpha}^2 \cdot \sigma_\alpha^2$$

Remarque : cette méthode ne donne pas la loi de distribution de Y , sauf cas particuliers :

ex: drainage :

$$q = \alpha^2 k_0^* \left\{ 1 + \frac{\beta-1}{\alpha \theta_0} \alpha^2 k_0^* \frac{t}{z} \right\}^{\beta/1-\beta} - 30 -$$

1) INFILTRATION

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ K^* \left(\frac{dh^*}{dz^*} - 1 \right) \right\}$$

$$D = K^* \frac{dh^*}{d\theta} + C_1 \gamma C_2 I \quad \begin{cases} t^* < 0, z^* \geq 0, \theta = \theta_n \\ t^* \geq 0, z^* = 0, \theta = \theta_0 \end{cases}$$

Milieu de référence:

Milieu quelconque

$$z^*(\theta, t^*) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^*(\theta), t^{*1/2}$$

$$I^* = S^* t^{*1/2} + A^* t^* \quad I = \alpha I^* \rightarrow I = \alpha^{1/2} S^* t^{*1/2} + \alpha^2 A^* t^*$$

$$i_0^* = \frac{1}{2} S^* t^{*1/2} + A^* \quad i_0 = \frac{1}{2} \alpha^{1/2} S^* t^{*1/2} + \alpha^2 A^*$$

solutions uniques.

solutions stochastiques
(α est une v.a.)

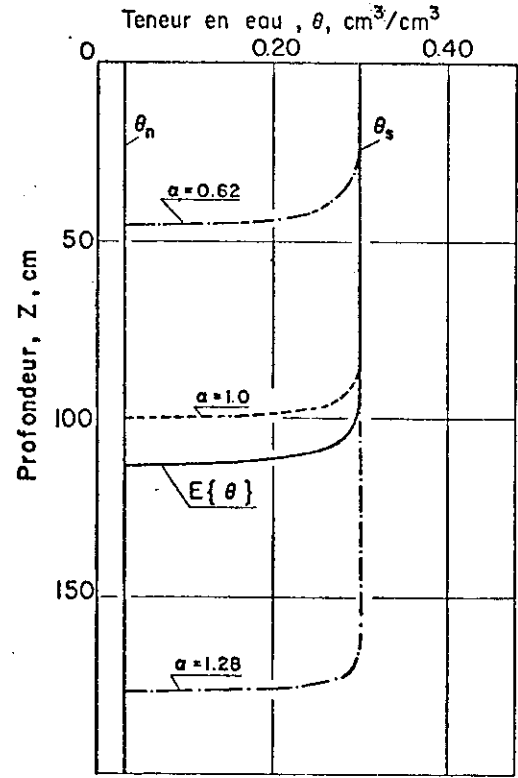


FIG.5 - Profils hydriques après 1 heure d'infiltration
 $\theta_n = 0.03 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$; $\theta_s = 0.30 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$

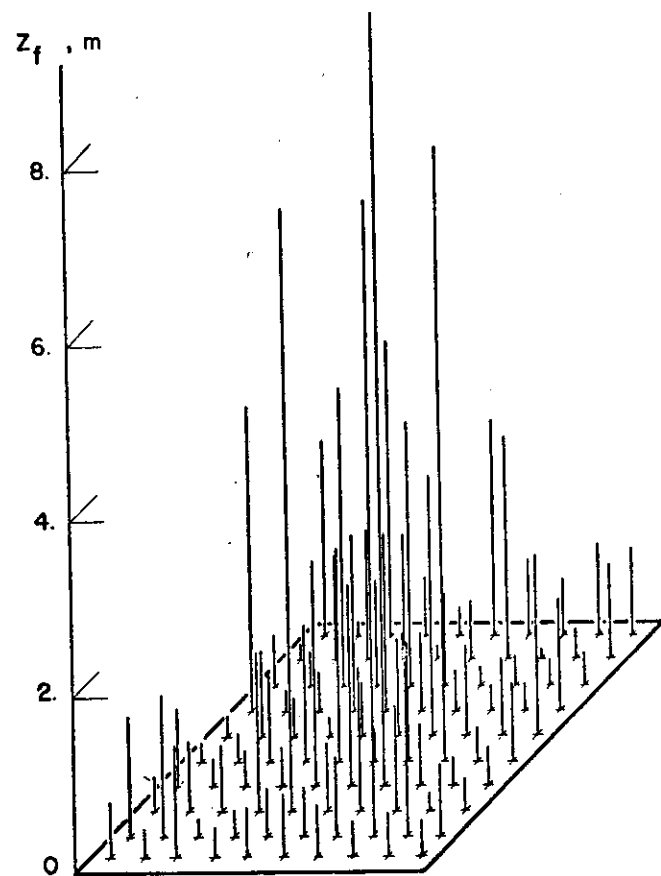


FIG.6 - Répartition spatiale du front d'infiltration au temps $t = 1$ heure.

33

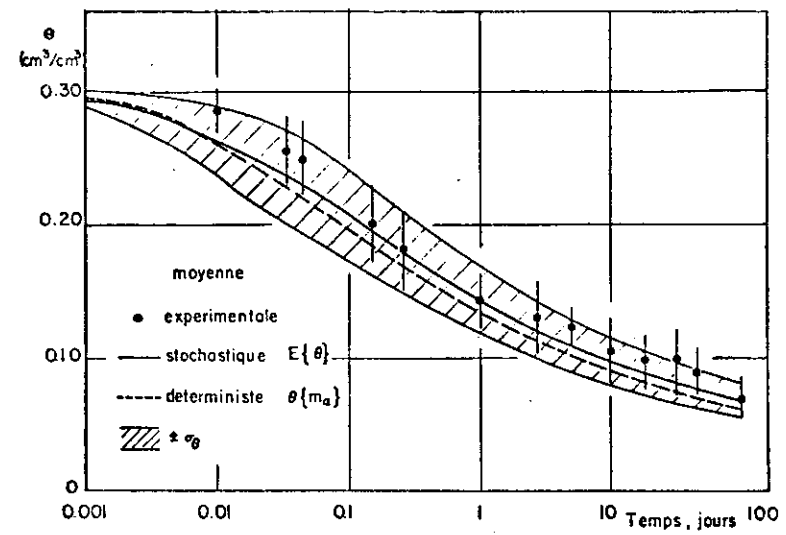
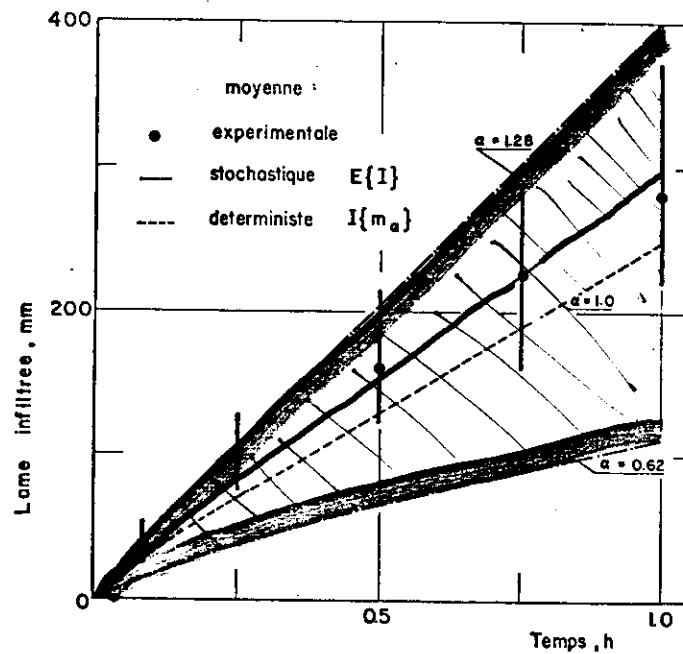


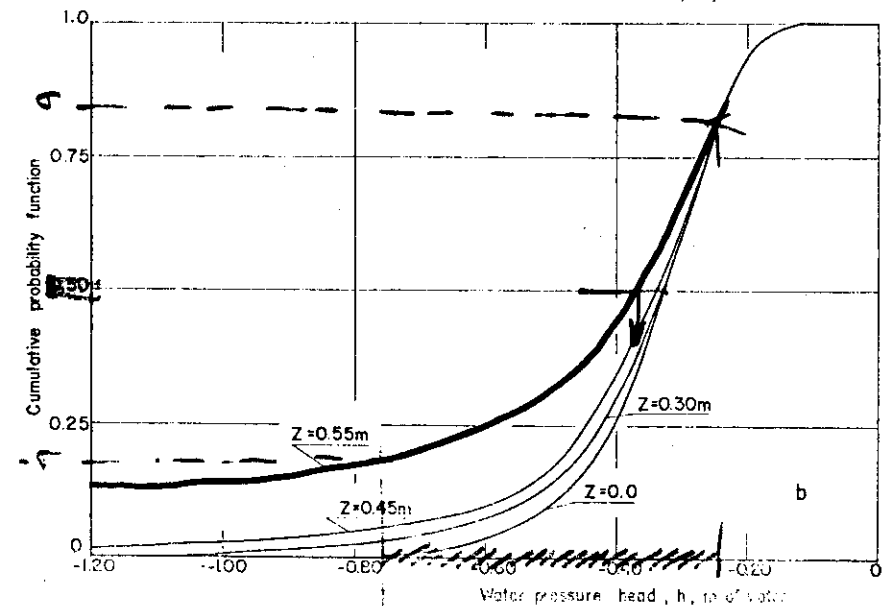
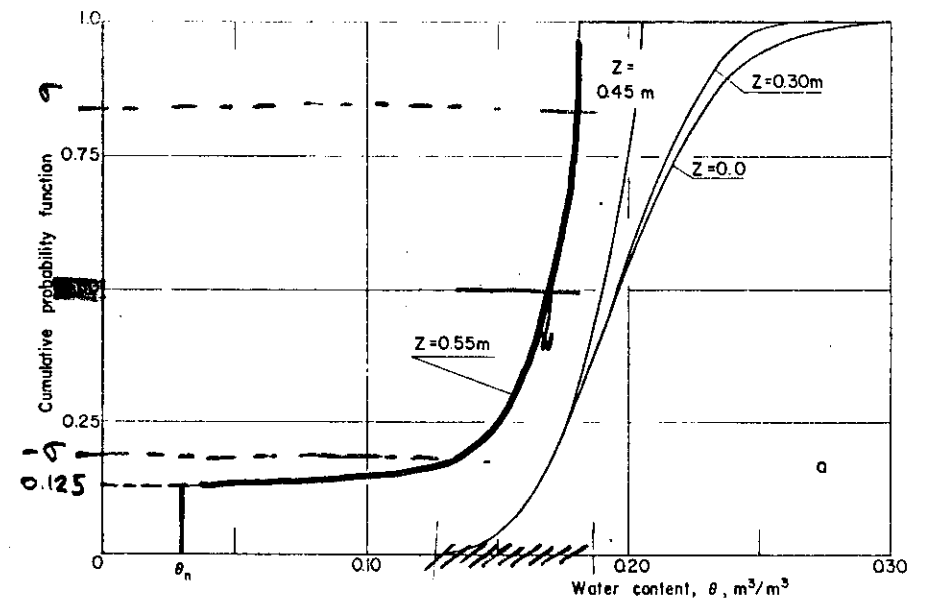
FIG.7 - Teneur en eau volumique en fonction du temps à $z = 110$ cm, au cours du drainage. Les barres expérimentales correspondent aux écarts types expérimentaux.

34



35

$$r = 4.1 \cdot 10^{-2} ; t = 10^7 \text{ (100 mm d'eau infiltrée)}$$



36

