INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
34100 TRIESTE (ITALY) - P.O.B. 586 - MIRAMARE - STRADA COSTIERA 11 - TELEPHONE: 2240-1
CABLE: CENTRATOM - TELEX 460392 - I

SMR 281/20

COLLEGE ON VARIATIONAL PROBLEMS IN ANALYSIS
(11 January - 5 February 1988)

SOLUTIONS PERIODIQUES D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL NON LINEAIRE DU SECOND ORDRE AVEC CHANGEMENT DE SIGNE

Leila LASSOUED
Departement de Mathematiques
Faculte des Science de Tunis
Campus Universitaire 1060
Tunis
TUNISIA

These are preliminary lecture notes, intended for distribution to participants.
Missing or extra copies are available from the College secretary.

SOLUTIONS PERIODIQUES D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL NON LINEAIRE DU SECOND ORDRE AVEC CHANGEMENT DE SIGNE

Leïla LASSOUED
Ceremade
et
Faculté des Sciences de Tunis,
Département de Mathématiques
Campus Universitaire 1060
Tunis
Tunisie

I . INTRODUCTION.

Dans ce travail on s'intéresse à la recherche de solutions T -périodiques d'un système différentiel du second ordre non linéaire :

$$\ddot{x} + a(t)V'(x) = f(t)$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sont des données supposées T -périodiques, la fonction $a(\cdot)$ changeant de signe, et où $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est un potentiel de classe C^2 strictement convexe sous-quadratique.

Les hypothèses précises sont données au paragraphe II.1 ; on notera dans toute la suite (1) le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \ddot{x} + a(t)V'(x) = f(t) & \text{p.p. sur } [0,T] \\ x(0) = x(T) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases}$$

et (1') le problème non forcé :

$$(1') \qquad \begin{cases} \ddot{x} + a(t)V'(x) = 0 & \text{p.p. sur } [0,T] \\ x(0) = x(T) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases}$$

Avec l'hypothèse de convexité de V, le problème (1) est équivalent à un problème de points critiques pour une fonctionnelle Φ dite d'action duale, dont l'idée est due à Clarke et Ekeland ([9], [10]). Dans le cas où la fonction $a(\cdot)$ garde un signe constant, cette fonctionnelle est minorée ou majorée selon que $a(\cdot)$ est positive ou négative, et il est aisé d'en déduire l'existence d'une solution au problème (1). Renvoyons à l'article de Clarke et Ekeland [11] où est traité le système plus général

$$\ddot{x} + V'_x(t,x) = f(t)$$

(avec $V(t,x) \geqslant 0$), et également à Rabinowitz [16] pour un résultat dans un cadre non convexe.

Dans le présent travail, on étudie le cas où la fonction $a(\cdot)$ change de signe. Il n'existait pas jusqu'ici de résultat général dans ce cas, on peut juste citer un travail de D.C. Clark [8] qui traite le cas où le potentiel est pair. Le problème a pourtant son importance en physique, il intervient notamment en mécanique quantique, dans l'étude du confinement de particules quantiques dans un champ électrique de radio fréquence [12].

Quand la fonction $a(\cdot)$ change de signe, la fonctionnelle Φ n'est ni minorée, ni majorée, mais l'espace E sur lequel elle est définie se décompose en somme directe de trois sous-espaces, un espace E^+ sur lequel elle est strictement convexe, un espace E^- sur lequel elle est strictement concave, et un espace E^0 de dimension finie. On utilise alors une méthode due à Amann [1] (voir également Amann et Zendher [2]) qui transforme, par un théorème de point selle, le problème en un problème de recherche de points critiques d'une fonctionnelle réduite φ sur l'espace E^0. Ceci est détaillé dans le paragraphe III.1 et on obtient par, selon le cas, minimisation ou maximisation de φ des théorèmes d'existence d'au moins une solution au problème (1).

Dans le cas où la fonction f est nulle, le problème (1') a une solution constante dite solution triviale, et on donne des conditions assurant la non-trivialité de la solution obtenue par la méthode précédente. On obtient également d'autres résultats d'existence d'une solution non triviale en appliquant à φ le théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz ([3]) ; on suppose pour cela le potentiel V asymptotiquement quadratique et non résonnant à l'infini, conditions qui semblent être assez naturelles du point de vue physique.

Tous les résultats de non trivialité obtenus ici ne s'appliquent que lorsque la fonction $a(\cdot)$ est de valeur moyenne strictement négative. L'étude du cas où la valeur moyenne de $a(\cdot)$ est positive ou nulle nécessite une réduction de la fonctionnelle autre que celle développée ici, on rendra compte de ce cas dans un second article (voir [15]).

D'autre part, on trouvera détaillé dans [15] l'interprétation des différents résultats établis ici dans le cas d'une fonction $a(\cdot)$ constante par morceaux.

Signalons également que S. Mathlouthi a entrepris une exploitation numérique de ce travail et que les premiers résultats sont très satisfaisants.

Notons enfin que l'étude du problème (1), ou même (1'), avec un potentiel surquadratique (voir par exemple [4], [16]) reste un problème ouvert.

II . POSITION DU PROBLEME ET FORMULATION VARIATIONNELLE.

1. POSITION DU PROBLEME.

On s'intéresse à la recherche de solutions du problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + a(t)V'(x(t)) = f(t) & \text{p.p. sur } [0,T] \\ x(0) = x(T) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases}$$

où $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ est supposée appartenir à l'espace $C^{1,+}([0,T], \mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe C^1 sur $[0,T]$, de dérivée absolument continue.

On fait les hypothèses suivantes :

$$(V_1) \qquad \begin{cases} V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ est strictement convexe, de classe } C^2 \text{, et vérifie :} \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad V(x) \geq V(0) = 0 \end{cases}$$

$$(V_2) \qquad \begin{cases} \text{Il existe des réels strictement positifs } \varepsilon \text{ et } A \text{ tels que} \\ (2) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad V''(x) \leq A\cdot I \\ (3) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad V''(x) \geq \varepsilon\cdot I \end{cases}$$

$$(V_3) \qquad \begin{cases} \text{Il existe des réels strictement positifs } k, K, C_1 \text{ et } C_2 \text{ tels que} \\ (4) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad V(x) \leq \frac{k}{2}|x|^2 + C_1 \\ (5) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad V(x) \geq \frac{K}{2}|x|^2 - C_2 \end{cases}$$

On note $W = V^*$ la conjuguée de Fenchel de V ([4]) qui est définie par :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad W(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [x\cdot y - V(x)]$$

Avec les hypothèses faites sur V, W est une fonction convexe de classe C^2, qui vérifie :

$$(6) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad W(y) \geq W(0) = 0$$

$$(7) \qquad x = W'(y) \iff y = V'(x)$$

$$(8) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad W''(y) = V''(W'(y))^{-1}$$

$$(9) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad W''(y) \geq \frac{1}{A}\, I$$

$$(10) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad W''(y) \leq \frac{1}{\varepsilon}\, I$$

$$(11) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad W(y) \geq \frac{1}{2k}\, |y|^2 - C_1$$

$$(12) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad W(y) \leq \frac{1}{2k}\, |y|^2 + C_2$$

On suppose d'autre part que la fonction a appartient à $L^1([0,T], \mathbb{R})$ et que

$$[0,T] = I^+ \cup I^- \cup N$$

où

$$I^+ = \{t \in [0,T] \;/\; a(t) > 0\}$$

$$I^- = \{t \in [0,T] \;/\; a(t) < 0\}$$

et où N est un négligeable de $[0,T]$.

On pose

$$\alpha^+ = \int_{I^+} a(t)\, dt$$

$$\alpha^- = -\int_{I^-} a(t)\, dt$$

$$\alpha = \alpha^+ + \alpha^- = \int_0^T |a(t)|\, dt$$

et on suppose ici que α^+ et α^- sont strictement positifs, c'est-à-dire que la fonction a change effectivement de signe, le cas où elle garde un signe constant étant résolu.

On utilisera la fonction $m : [0,T] \to \mathbb{R}$ définie presque partout par

$$m(t) = \begin{cases} \dfrac{a(t)}{\alpha^+} & \text{sur } I^+ \\[2ex] \dfrac{a(t)}{\alpha^-} & \text{sur } I^- \end{cases}$$

On suppose enfin que $f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ est mesurable et vérifie

$$\int_0^T \frac{|f|^2}{|a|}\, dt < +\infty \quad .$$

REMARQUE 1.1.

1) La condition (V_3) concerne le comportement de V à l'infini. Comme vérifie d'autre part (V_2) on peut supposer

$$\varepsilon \leq K \leq k \leq A$$

2) L'hypothèse (3) dans (V_2) peut être remplacée par (3') :

Il existe des réels strictement positifs γ et C_3 tels que

$$(3') \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad |V'(x)| \geq \gamma |x| - C_3$$

(voir la remarque 3.13 de [15]).

2. FORMULATION VARIATIONNELLE.

On note $\tilde{E}$ l'espace des $u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mesurables tels que

$$\int_0^T \frac{|u|^2}{|a|}\, dt < +\infty \quad ,$$

muni du produit scalaire

$$\langle u,v \rangle_{\tilde{E}} = \int_0^T \frac{u \cdot v}{|a|}\, dt \quad .$$

$\tilde{E}$ est un espace de Hilbert qui s'injecte continûment dans $L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$:

$$(13) \qquad \|u\|_{L^1} \leq \|a\|_{L^1}^{1/2}\, \|u\|_{\tilde{E}}$$

On pose :

$$E = \left\{ u \in \tilde{E} \;/\; \int_0^T u\, dt = 0 \right\}$$

L'espace E se décompose en somme directe orthogonale $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$, où :

$$E^+ = \{u \in E \;/\; u = 0 \text{ sur } I^-\}$$

$$E^- = \{u \in E \ / \ u = 0 \ \text{ sur } \ I^-\}$$
$$E^o = \{u \in E \ / \ u = m(t)\xi \ , \ \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

Si p_+, p_-, p_o , désignent les opérateurs de projection sur E^+, E^-, E^o respectivement, on a :

$$\begin{cases} p^+u = \left(u - \frac{a}{\alpha+} \int_{I^+} u \, dt\right) \cdot \chi_{I^+} \\ p^-u = \left(u - \frac{a}{\alpha-} \int_{I^+} u \, dt\right) \cdot \chi_{I^-} \\ p^o u = m(t) \int_{I^+} u \, dt \end{cases}$$

On notera E_1, E_1^+, E_1^-, E_1^o les espaces obtenus lorsque $n = 1$ et p_1^+, p_1^-, p_1^o les opérateurs de projection dans ce cas.

On rappelle que Πu désigne la primitive de moyenne nulle de u :

$$\Pi u(t) = \int_o^t u(s) - \frac{1}{T} \int_o^T \left(\int_o^\tau u(s) ds\right) d\tau$$

On définit sur E la fonctionnelle

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) + \Phi_2(u)$$

avec

$$\Phi_1(u) = -\frac{1}{2} \int_o^T |\Pi u|^2 dt$$

$$\Phi_2(u) = \int_o^T a \, W\!\left(\frac{u+f}{a}\right) dt$$

PROPOSITION 2.1.

La fonctionnelle Φ_1 s'écrit

$$\Phi_1(u) = -\frac{1}{2} \langle Lu, u\rangle_E$$

où L est un opérateur compact autoadjoint défini positif. On note λ_1 la plus grande valeur propre de L .

On a :

$$\lambda_1 \leq T \, \|a\|_{L^1}$$

Dans le cas où la fonction a est dans L^∞ , on a :

$$\lambda_1 \leq \frac{T^2}{4\Pi^2} \, \|a\|_{L^\infty}$$

DEMONSTRATION.

On voit que

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2} \int_o^T \Pi^2 u \, u = -\frac{1}{2} \langle Lu, u\rangle_E$$

avec

$$Lu = -|a| \left(\Pi^2 u - \frac{1}{\alpha} \int_o^T |a| \Pi^2 u \, dt\right)$$

Il est clair que L est compact, autoadjoint et défini positif. D'autre part pour u appartenant à $L^1(]0,T[, \mathbb{R})$, on a

$$\forall \, t \in [0,T] \qquad |\Pi u(t)| \leq \|u\|_{L^1}$$

En effet, Π étant de moyenne nulle sur $[0,T]$, il existe un point t_o de $[0,T]$ où Πu s'annule. On a donc

$$\Pi u(t) = \int_{t_o}^t u(s) \, ds$$

d'où

$$|\Pi u(t)| \leq \|u\|_{L^1}$$

On a donc

$$\int_o^T |\Pi u|^2 \, dt \leq T\|u\|_{L^1}^2 \leq T\|a\|_{L^1}\|u\|_E^2 \qquad ((13))$$

d'où

$$\lambda_1 \leq T\|a\|_{L^1}$$

Dans le cas où la fonction a est dans L^∞ , il est clair que E s'injecte dans L^2 :

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \|a\|_{L^\infty}\|u\|_E^2$$

D'autre part on sait que pour u appartenant à $L_o^2 = \left\{u \in L^2 \,/\, \int_o^T u = 0\right\}$ on a

$$\|\Pi u\|_{L^2} \leq \frac{T}{2\Pi}\|u\|_{L^2}$$

On en déduit

$$\|\Pi u\|^2_{L^2} \leq \frac{T^2}{4\Pi^2}\|a\|_{L^\infty}\|u\|^2_E$$

donc

$$\lambda_1 \leq \frac{T^2}{4\Pi^2}\|a\|_{L^\infty} .$$

Dans la suite on notera λ_1^+ la plus grande valeur propre de l'opérateur $L^+ = p^+ \circ L/E^+$, qui vérifie donc

$$\lambda_1^+ \leq \lambda_1$$

D'autre part, pour u^+ appartenant à E^+ on a

$$\Phi_1(u^+) = -\frac{1}{2}\langle L^+u^+,u^+\rangle_{E^+}$$

donc :

(14) $$\forall u^+ \in E^+, \qquad \Phi_1(u^+) \geq -\lambda_1^+\|u^+\|^2_E$$

REMARQUES 2.2.

1) On voit facilement que $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ est la plus petite valeur strictement positive pour laquelle l'équation $\ddot{x} + \mu|a(t)|x = 0$ admet une solution T périodique non nulle.

2) De même $\mu_1^+ = \frac{1}{\lambda_1^+}$ est la plus petite valeur strictement positive pour laquelle le problème

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu|a(t)|x = 0 & \text{p.p. sur } I^+ \\ \ddot{x} = 0 & \text{p.p. sur } I^- \\ \int_o^T \ddot{x} = \int_o^T \dot{x} = 0 & \end{cases}$$

admet une solution non nulle.

3) Dans le cas où la fonction a appartient à L^q, $1 < q < +\infty$, on a :

$$\lambda_1 \leq \frac{T^{2-1/q}}{(2\Pi)^{2-2/q}}\|a\|_{L^q}$$

En effet, d'une part l'espace E s'injecte continûment dans l'espace $L^{2q/1+q}$:

$$\|u\|_{L^{\frac{2q}{1+q}}} \leq \|a\|^{1/2}_{L^q}\|u\|_E$$

d'autre part, en notant $N(r)$ la norme de l'opérateur Π de L_o^r dans L^2, le lemme de convexité de M. Riesz ([13]) assure que la fonction $\text{Log}\, N(\frac{1}{r})$ est une fonction convexe de r, $0 \leq r \leq 1$. On en déduit pour $1 \leq r \leq 2$:

$$N(r) \leq [N(1)]^{\frac{2}{r}-1}[N(2)]^{2-\frac{2}{r}}$$

donc

$$N(r) \leq T^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}\left(\frac{T}{2\Pi}\right)^{2-\frac{2}{r}} = \frac{T^{\frac{3}{2}-\frac{1}{r}}}{(2\Pi)^{2-\frac{2}{r}}}$$

et l'inégalité

$$\lambda_1 \leq \left[N\left(\frac{2q}{1+q}\right)\right]^2\|a\|_{L^q}$$

donne

$$\lambda_1 \leq \frac{T^{2-1/q}}{(2\Pi)^{2-2/q}}\|a\|_{L^q}$$

PROPOSITION 2.3.

La fonctionnelle Φ_2 est continûment différentiable sur E, deux fois Gâteaux différentiable et on a

(15) $$\Phi_2'(u) = |a|\left[W'\left(\frac{u+f}{a}\right) - \frac{1}{\alpha}\int_o^T |a|\, W'\left(\frac{u+f}{a}\right) dt\right]$$

(16) $$\forall h \in E \qquad \Phi_2''(u)h\cdot h = \int_o^T W''\left(\frac{u+f}{a}\right)\frac{h\cdot h}{a}\, dt .$$

DEMONSTRATION.

L'inégalité (12) montre que Φ_2 est bien définie sur E.

En faisant le changement de variable $u = |a|^{1/2}v$ on obtient $\Phi_2(u) = \psi(v)$ avec :

$$\psi(v) = \int_0^T g(t,v)\, dt$$

ceci en définissant pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$

$$g(t,x) = a(t)\, \mathcal{W}\left(\frac{|a|^{1/2}x + f}{a}\right)$$

Pour tout $t \in [0,T]$ l'application $x \to g(t,x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et ((10))

$$\| g''_{xx}(t,x) \| < \frac{1}{\varepsilon}$$

On peut alors appliquer le résultat de [4] (page 24) : on obtient que ψ est de classe C^1, deux fois Gâteaux différentiable sur $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ et

$$\forall h \in L^2 \qquad \psi'(u)h = \int_0^T g'_x(t;v)h\, dt$$

$$\psi''(u)hh = \int_0^T g''_{xx}(t,v)hh\, dt$$

En revenant à Φ_2 on obtient

$$\forall h \in E \qquad \Phi'_2(u)h = \int_0^T \mathcal{W}'\left(\frac{u+f}{a}\right)h\, dt$$

$$\Phi''_2(u)hh = \int_0^T \mathcal{W}''\left(\frac{u+f}{a}\right) \frac{hh}{a}\, dt$$

d'où le résultat.

De ces deux propositions on déduit :

PROPOSITION 2.4.

Φ est de classe C^1 deux fois Gâteaux différentiable avec :

(17) $$\Phi'(u) = |a| \left(\Pi^2 u + \mathcal{W}'\left(\frac{u+f}{a}\right)\right) - \frac{1}{\alpha} \int_0^T |a| \left(\Pi^2 u + \mathcal{W}'\left(\frac{u+f}{a}\right)\right)$$

(18) $$\forall h \in E : \quad \Phi''(u)hh = \int_0^T \left(-|\Pi h|^2 + \mathcal{W}''\left(\frac{u+f}{a}\right) \frac{hh}{a} \right) dt$$

De plus (10) montre que

$$\|\Phi''(u)\|_{L(E,E)} < \lambda_1 + \frac{1}{\varepsilon} .$$

La proposition suivante, qui est une variante d'un principe de dualité général dû à Clarke et Ekeland ([9], [10]), montre comment la résolution du problème (1) se ramène à la recherche d'un point critique de Φ.

PROPOSITION 2.5.

a) Supposons que x soit une solution du problème (1). Alors $u = -\ddot{x}$ est un point critique de Φ.

b) Inversement si u est un point critique de Φ, il existe un unique $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = -\Pi^2 u + \xi$ soit solution de (1).

DEMONSTRATION.

a) Soit x une solution du problème (1) et soit $u = -\ddot{x} = aV'(x) - f$. L'inégalité $|V'(x)| \leq A|x|$ déduite de (2) donne

$$\int_0^T \frac{|aV'(x)|^2}{|a|}\, dt \leq A \|x\|_\infty^2 \|a\|_1 < +\infty$$

et u appartient donc à E.

D'autre part, $\ddot{x} + aV'(x) = f$ donne

$$V'(x) = \frac{f - \ddot{x}}{a}$$

Donc d'après (7)

$$x = \mathcal{W}'\left(\frac{f-\ddot{x}}{a}\right)$$

Or comme $x(0) = x(T)$ on a

$$\dot{x} = -\Pi u$$

et

$$x = -\Pi^2 u + \xi , \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

On obtient donc

$$\Pi^2 u + \mathcal{W}'\left(\frac{u+f}{a}\right) - \xi = 0$$

c'est-à-dire

$$\Phi'(u) = 0 .$$

b) Soit u un point critique de Φ : on a donc

$$\Pi^2 u + W'\left(\frac{u+f}{a}\right) = \xi \in \mathbb{R}^n$$

ce qui s'écrit en utilisant à nouveau (7)

$$\frac{u+f}{a} = V'(-\Pi^2 u + \xi)$$

et on voit que $x = -\Pi^2 u + \xi$ est solution du problème (1).

III . REDUCTION A LA DIMENSION FINIE PAR MIN-MAX.

1. LA REDUCTION A LA DIMENSION FINIE.

On cherche donc à prouver l'existence d'un point critique pour Φ. On peut utiliser pour cela une réduction à la dimension finie par min-max suivant l'approche introduite par H. Amann [1] (voir également [2]).

THEOREME 1.1.

On suppose

(19) $$A < \frac{1}{\lambda_1^+}$$

Il existe alors une unique application

$$E^0 \xrightarrow{\theta} E^+ \times E^-$$
$$u^0 \to (u^+(u^0), u^-(u^0))$$

telle que pour tout $u^0 \in E^0$, $u^+ \in E^+$, $u^- \in E^-$:

(20) $$\Phi(u^0+u^+(u^0)+u^-) \le \Phi(u^0+u^+(u^0)+u^-(u^0)) \le \Phi(u^0+u^++u^-(u^0))$$

De plus en posant $\varphi(u^0) = \Phi(u^0+u^+(u^0)+u^-(u^0))$ on a :

(21) $$\begin{cases} \varphi(u^0) = \max\limits_{u^- \in E^-} \min\limits_{u^+ \in E^+} \Phi(u^0+u^++u^-) \\ \varphi(u^0) = \min\limits_{u^+ \in E^+} \max\limits_{u^- \in E^-} \Phi(u^0+u^++u^-) \end{cases}$$

D'autre part φ est une application de classe C^1 sur E^0, dont la dérivée est donnée par

(22) $$\varphi'(u^0) = \Phi'(u^0+u^+(u^0)+u^-(u^0)) .$$

DEMONSTRATION.

On adapte celle du théorème 2.3 de [1]. Définissons $F : E^+ \times E^- \times E^0 \to \mathbb{R}$ par

$$F(u^+,u^-,u^0) = \Phi(u^++u^-+u^0)$$

F est de classe C^1, deux fois différentiable et on a :

$$\forall h^+ \in E^+ \qquad F''_{u^+u^+}(u^+,u^-,u^0)h^+h^+ = \Phi''(u^++u^-+u^0)h^+h^+$$

donc

$$F''_{u^+u^+}(u^+,u^-,u^0)h^+h^+ = \int_0^T -|\Pi h^+|^2 dt + \int_{I^+} W''\left(\frac{u+f}{a}\right) \frac{h^+h^+}{a}\, dt$$
$$\ge \left(\frac{1}{A} - \lambda_1^+\right) \|h^+\|^2_{E^+}$$

De même $\forall h^- \in E^-$:

$$F''_{u^-u^-}(u^+,u^-,u^0)h^-h^- = -\int_0^T |\Pi h^-|^2 - \int_{I^-} W''\left(\frac{u+f}{a}\right) \frac{h^-h^-}{a}\, dt$$
$$\le -\frac{1}{A} \|h^-\|^2_{E^-}$$

Posons $\mu = \frac{1}{A} - \lambda_1^+$.

Par hypothèse μ est strictement positif et ce qui précède montre que pour tout $u^0 \in E^0$ l'application

$$\Gamma_{u^0} : E^+ \times E^- \to E^+ \times E^-$$
$$(u^+,u^-) \to \left(F'_{u^+}(u^+,u^-,u^0), -F'_{u^-}(u^+,u^-,u^0)\right)$$

et μ monotone, c'est-à-dire vérifie, $\forall x \in E^+ \times E^-$, $\forall y \in E^+ \times E^-$

$$\langle \Gamma_{u^0}(x) - \Gamma_{u^0}(y), x-y \rangle_{E^+ \times E^-} \ge \mu \|x-y\|^2_{E^+ \times E^-}$$

$$\varphi'(u^0) = F'_{u^0}(\bar\theta(u^0),u^0) = p^0\Phi'(u^+(u^0)+u^-(u^0)+u^0)$$
$$= \Phi'(u^+(u^0)+u^-(u^0)+u^0)$$

car $\Phi'(u^+(u^0)+u^-(u^0)+u^0)$ appartient à E^0 .

Le théorème est ainsi démontré.

On suppose dans toute la suite

$$A < \frac{1}{\lambda_1^+}$$

La relation (22) montre qu'à tout point u^0 critique de φ est associé le point critique $u = u^+(u^0) + u^-(u^0) + u^0$ de Φ . Inversement si $u = u^+ + u^- + u^0$ est un point critique de Φ , il est clair que $u^+ = u^+(u^0)$, $u^- = u^-(u^0)$, et que u^0 est un point critique de φ .

On s'est donc ramené à la recherche d'un point critique pour φ sur E^0 , espace de dimension finie n .

Dans ce qui suit on démontre d'abord que φ est de classe C^2 . Puis on cherche des estimations de φ à l'infini pour, selon le cas, minimiser ou maximiser φ sur E^0 .

On étudie dans le cas $f = 0$ la non trivialité du point critique obtenu. Enfin dans le cas où V est asymptotiquement quadratique à l'infini et $f = 0$, on applique le théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz.

2. REGULARITE C^2 DE φ .

PROPOSITION 2.1.

L'application $u^0 \to \dfrac{u^0+u^+(u^0)+u^-(u^0)+f}{a}$ envoie continûment E^0 dans $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$.

DEMONSTRATION.

Notons $\bar\theta$ l'application de E^0 dans $E^+ \oplus E^-$ donnée par

$$\bar\theta(u^0) = u^+(u^0) + u^-(u^0) \quad .$$

$\bar\theta(u^0)$ est l'unique élément de $E^+ \oplus E^-$ tel que $\Phi'(u^0+\bar\theta(u^0)) \in E^0$.

On a donc

$$\Phi'(u^0+\bar\theta(u^0)) = m(t)\eta(u^0)$$

avec

$$\text{(23)} \qquad \eta(u^0) = \int_{I^+} \Phi'(u^0+\bar\theta(u^0))\, dt \in \mathbb{R}^n$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} \Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0)) + W'\left(\dfrac{u^0+\bar\theta(u^0)+f}{a}\right) - \xi(u^0) = \dfrac{\eta(u^0)}{\alpha^+} & \text{sur } I^+ \\ \Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0)) + W'\left(\dfrac{u^0+\bar\theta(u^0)+f}{a}\right) - \xi(u^0) = -\dfrac{\eta(u^0)}{\alpha^-} & \text{sur } I^- \end{cases}$$

où

$$\text{(24)} \qquad \xi(u^0) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\Pi} |a| \left[\Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0)) + W'\left(\frac{u^0+\bar\theta(u^0)+f}{a}\right)\right] dt$$

On a donc

$$\begin{cases} W'\left(\dfrac{u^0+\bar\theta(u^0)+f}{a}\right) = -\Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0)) + \dfrac{\eta(u^0)}{\alpha^+} + \xi(u^0) & \text{sur } I^+ \\ W'\left(\dfrac{u^0+\bar\theta(u^0)+f}{a}\right) = -\Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0)) - \dfrac{\eta(u^0)}{\alpha^-} + \xi(u^0) & \text{sur } I^- \end{cases}$$

D'où, en utilisant (7)

$$\frac{u^0+\bar\theta(u^0)+f}{a} = \begin{cases} V'\left[-\Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0)) + \dfrac{\eta(u^0)}{\alpha^+} + \xi(u^0)\right] & \text{sur } I^+ \\ V'\left[-\Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0)) - \dfrac{\eta(u^0)}{\alpha^-} + \xi(u^0)\right] & \text{sur } I^- \end{cases}$$

L'application $u^0 \to \bar\theta(u^0)$ est continue de E^0 dans $E^+ \oplus E^-$, donc $u^0 \to \Pi^2(u^0+\bar\theta(u^0))$ est continue de E^0 dans $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$. Les formules (23) et (24) montrent que $u^0 \to \eta(u^0)$ et $u^0 \to \xi(u^0)$ sont continues de E^0 dans $\mathbb{R}^n$. On en déduit que

$$u^0 \to \frac{u^0+\bar\theta(u^0)+f}{a}$$

envoie E^0 dans $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$ de façon continue.

De cette proposition on déduit :

COROLLAIRE 2.2.

L'application

$$u^o \to \Phi''(u^o + \bar{\theta}(u^o))$$
$$E^o \to \mathcal{L}(E)$$

est continue.

DEMONSTRATION.

Il suffit de dire que $u^o \to \Psi''\left(\frac{u^o+\bar{\theta}(u^o)+f}{a}\right)$ est continue de E^o dans $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION 2.3.

L'application θ est de classe C^1.

DEMONSTRATION.

Posons $X = E^+ \times E^-$,

$$F : X \times E^o \to \mathbb{R}$$
$$((u^+,u^-),u^o) \to \phi(u^+ + u^- + u^o)$$

et

$$\Gamma(x,u^o) = \left(F'_{u^+}(x,u^o), -F'_{u^-}(x,u^o)\right)$$

On a vu au cours de la démonstration du théorème 1.1 que :

$$\forall\, y \in X \qquad \langle \Gamma'_x(x,u^o)y,y\rangle_X \geq \mu \|y\|_X \qquad \left(\mu = \frac{1}{A} - \lambda_1^+ > 0\right)$$

L'opérateur $\Gamma'_x(x,u^o)$ est donc un isomorphisme de X ([6]).

Pour $u^o \in E^o$, $h \in E^o$ on pose

$$\eta(h) = \theta(u^o+h) - \theta(u^o)$$
$$\bar{\eta}(h) = \bar{\theta}(u^o+h) - \bar{\theta}(u^o)$$

On peut écrire

(25) $$\left\|\Gamma(\theta(u^o+h),u^o+h) - \Gamma(\theta(u^o),u^o) - \Gamma'_x(\theta(u^o),u^o)\eta(h) - \Gamma'_{u^o}(\theta(u^o),u^o)\cdot h\right\| \leq C(h)\left(\|\eta(h)\|^2 + \|h\|^2\right)^{1/2}$$

avec

$$C(h) = \sup_{s\in[0,1]} \left\|\Gamma'(\theta(u^o)+s\eta(h),u^o+sh) - \Gamma'(u^o)\theta(u^o)\right\|$$

Mais $\Gamma(\theta(u^o+h),u^o+h) = \Gamma(\theta(u^o),u^o) = 0$, en notant γ la constante de Lipschitz pour θ, l'inégalité (25) donne donc

$$\left\|\Gamma'_x(\theta(u^o),u^o)\eta(h) + \Gamma'_{u^o}(\theta(u^o),u^o)h\right\| \leq (1+\gamma^2)^{1/2}\, C(h)\|h\|$$

Posons

$$u(s,h) = u^o + \bar{\theta}(u^o) + sh + s\bar{\eta}(h)$$
$$= s\,[u^o+h+\bar{\theta}(u^o+h)] + (1-s)\,[u^o+\bar{\theta}(u^o)]$$

On a

$$C(h) \leq \sup_{s\in[0,1]} \|\Phi''(u(s,h)) - \Phi''(u(0,0))\|$$

Il est clair que, lorsque h tend vers zéro dans E^o, $\frac{u(s,h)+f}{a}$ converge vers

$$\frac{u(s,0)+f}{a} = \frac{u(0,0)+f}{a} \qquad \text{dans } L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n),$$

uniformément en $s \in [0,1]$. On en déduit (Corollaire 2.2) que $C(h)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro. On a donc

$$\left\|\theta(u^o+h) - \theta(u^o) + [\Gamma'_x(\theta(u^o),u^o)]^{-1}\,\Gamma'_{u^o}(\theta(u^o),u^o)h\right\| \leq C_1(h)\|h\|$$

avec

$$\lim_{h\to 0} C_1(h) = 0$$

c'est-à-dire que θ est différentiable et

(26) $$\theta'(u^o) = -[\Gamma'_x(\theta(u^o),u^o)]^{-1} \circ \Gamma'_{u^o}(\theta(u^o),u^o)$$

En utilisant à nouveau le corollaire 2.2, on voit que $u^o \to \theta'(u^o)$ est continue, θ est donc de classe C^1.

D'autre part (34) signifie que pour tout $h \in E^o$, $\theta'(u^o)h$ est l'unique couple $(v^+,v^-) \in E^+ \times E^-$ tel que

$$\begin{cases} P^+\,[\Phi''(u^o+\bar{\theta}(u^o))(v^++v^-)] = -P^+\,[\Phi''(u^o+\bar{\theta}(u^o))h] \\ P^-\,[\Phi''(u^o+\bar{\theta}(u^o))(v^++v^-)] = -P^-\,[\Phi''(u^o+\bar{\theta}(u^o))h] \end{cases}$$

c'est-à-dire tel que

$$\Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))(v^++v^-+h) \in E^o \quad .$$

$\bar\theta'(u^o)h$ est donc caractérisé par

$$(27) \qquad \Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))\,[h+\bar\theta'(u^o)h\,] \in E^o$$

PROPOSITION 2.4.

L'application φ est de classe C^2 sur E^o, et en tout point u^o l'indice de Morse (respectivement le coindice) de φ en u^o est l'indice (respectivement le coindice) de la restriction de la forme quadratique $\Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))$ à l'orthogonal pour cette forme de l'espace $E^+\oplus E^-$.

DEMONSTRATION.

D'après le théorème 1.1, φ est de classe C^1 et

$$\varphi'(u^o) = \Phi'(u^o+\bar\theta(u^o))$$

Φ' étant Gâteaux différentiable et $\bar\theta$ de classe C^1, φ' est Gâteaux différentiable et

$$\varphi''(u^o) = \Phi''(u^o+\bar\theta(u^o)) \circ \left(id_{E^o} + \bar\theta'(u^o)\right)$$

Le corollaire 2.2 montre que φ'' est continue, φ' est donc de classe C^1, et φ de classe C^2.

D'autre part, pour tout $h \in E^o$,

$$\begin{aligned}\varphi''(u^o)hh &= \Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))\ (h+\bar\theta'(u^o)h)h \\ &= \Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))\ (h+\bar\theta'(u^o)h)(h+\bar\theta'(u^o)h)\end{aligned}$$

car $\Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))(h+\bar\theta'(u^o)h)$ appartient à E^o et $\bar\theta'(u^o)h$ à $E^+\oplus E^-$.

Notons F l'orthogonal dans E de $E^+\oplus E^-$ pour la forme quadratique $\Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))$. Pour tout h appartenant à E_o, (26) montre que l'élément $h+\bar\theta'(u^o)h$ appartient à F. Inversement, soit u appartenant à F, c'est-à-dire tel que

$$\Phi''(u^o+\bar\theta(u^o))\,u \in E^o$$

Si $h = p_o u$, $\bar\theta'(u^o)h$ étant l'élément de $E^+\oplus E^-$ caractérisé par (26), on voit que

$$\bar\theta'(u^o)h = p_+u + p_-u$$

et

$$u = h + \bar\theta'(u^o)h \quad .$$

Ainsi, lorsque h décrit E^o, l'élément $h+\bar\theta'(u^o)h$ décrit l'espace F, d'où le résultat énoncé sur l'indice et le coindice de Morse de φ en u^o.

3. ESTIMATIONS A L'INFINI. THEOREMES D'EXISTENCE.

On définit :

$$(28) \qquad \begin{cases} Q_{1,k}(u^o,u^+) = -\frac{1}{2}\int_o^T |\Pi u^o+\Pi u^+|^2 + \frac{1}{2k}\int_{I^+}\frac{|u^++f|^2}{a} \\ Q_{2,k}(u^o,u^-) = -\frac{1}{2}\int_o^T |\Pi u^o+\Pi u^-|^2 - \frac{1}{2k}\int_{I^-}\frac{|u^-+f|^2}{a} \end{cases}$$

On a :

LEMME 3.1.

Il existe une constante réelle C telle que pour tout $u^o \in E^o$, $u^o = m\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$(29) \qquad \varphi(u^o) \geq \min_{u^+\in E^+} Q_{1,k}(u^o,u^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k\alpha^+}-\frac{1}{K\alpha^-}\right)|\xi|^2 - C|\xi| - C$$

$$(30) \qquad \varphi(u^o) \leq \max_{u^-\in E^-} Q_{2,k}(u^o,u^-) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K\alpha^+}\ \frac{1}{k\alpha^-}\right)|\xi|^2 + C|\xi| + C$$

DEMONSTRATION.

Dans tous les calculs on note C toute constante indépendante de ξ.

Soit donc $u^o = m\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{cases} \int_{I^+}\frac{|u^o|^2}{a}\,dt = \frac{|\xi|^2}{\alpha^+} \\ \int_{I^-}\frac{|u^o|}{a}\,dt = \frac{|\xi|^2}{\alpha^-} \\ \|u^o\|_E^2 = \left(\frac{1}{\alpha^+}+\frac{1}{\alpha^-}\right)|\xi|^2 \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$\varphi(u^o) = \max_{u^- \in E^-} \min_{u^+ \in E^+} \Phi(u^o+u^++u^-)$$

donc

$$\varphi(u^o) \geq \min_{u^+ \in E^+} \Phi(u^o+u^+)$$

Or

$$\Phi(u^o+u^+) = \Phi_1(u^o+u^+) + \Phi_2(u^o+u^+)$$

et

$$\Phi_2(u^o+u^+) = \int_{I^+} a(t) W\left(\frac{u^o+u^++f}{a}\right) dt - \int_{I^-} |a| W\left(\frac{u^o+f}{a}\right) dt$$

(11) donne

$$\int_{I^+} a(t) W\left(\frac{u^o+u^++f}{a}\right) dt \geq \frac{1}{2k} \int_{I^+} \frac{|u^o+u^++f|^2}{a} - c_1\alpha^+$$

En développant et en minorant on obtient :

$$\int_{I^+} a\, W\left(\frac{u^o+u^++f}{a}\right) \geq \frac{1}{2k}\left[\frac{|\xi|^2}{\alpha^+} + \int_{I^+} \frac{|u^++f|^2}{a} - 2\frac{|\xi|}{\sqrt{\alpha^+}} \|f\|_E\right] - C$$

Soit

$$\int_{I^+} a\, W\left(\frac{u^o+u^++f}{a}\right) \geq \frac{1}{2k\alpha^+}|\xi|^2 + \frac{1}{2k}\int_{I^+} \frac{|u^++f|^2}{a} - C|\xi| - C$$

D'autre part en utilisant (12)

$$\int_{I^-} |a|\, W\left(\frac{u^o+f}{a}\right) \leq \frac{1}{2K}\int_{I^-} \frac{|u^o+f|^2}{|a|} + C_2\alpha^-$$

$$\leq \frac{1}{2K\alpha^-}|\xi|^2 + C|\xi| + C$$

En regroupant on obtient

$$\Phi(u^o+u^+) \geq Q_{1,k}(u^o,u^+) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k\alpha^+} - \frac{1}{K\alpha^-}\right]|\xi|^2 - C|\xi| - C$$

d'où (29).

(30) se démontre de façon analogue, en écrivant que

$$\varphi(u^o) \leq \max_{u^- \in E^-} \Phi(u^o+u^-) \quad .$$

LEMME 3.2.

Il existe une unique fonction $y_{1,k} \in C^{1,+}([0,T], \mathbb{R})$ solution de :

$$(31) \quad \begin{cases} \ddot{y} + k\,a\,y = k\,a\,\Pi^2 m & \text{pp sur } I^+ \\ \int_0^T \dot{y}\,dt = 0 & \\ \ddot{y} = 0 \text{ sur } I^- & \text{et} \quad \int_{I^+} \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

Si on note

$$(32) \quad M_1(k) = \int_0^T \Pi m(\Pi m - \dot{y}_{1,k})\,dt$$

$M_1(k)$ est un réel strictement positif et on a

$$(33) \quad \min_{u^+ \in E^+} Q_{1,k}(u^o,u^+) = -\frac{1}{2} M_1(k)|\xi|^2 + x_1(f)\cdot\xi + x_2(f)$$

où $x_1(f)$ et $x_2(f)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ indépendants de ξ, fonctions de f, tous deux nuls si $f = 0$.

DEMONSTRATION.

On a

$$Q_{1,k}(u^o,u^+) = -\frac{1}{2}\int_0^T |\Pi u^o + \Pi u^+|^2 + \frac{1}{2k}\int_{I^+} \frac{|u^++f|^2}{a}$$

Il est clair que $Q_{1,k}(u^o,\cdot)$ est de classe C^2 sur E^+ avec

$$\forall h \in E^+, \quad Q''_{1,k}(u^o,u^+)hh = \int_0^T -|\Pi h|^2 + \frac{1}{k}\int_{I^+} \frac{|h|^2}{a}$$

$$\geq \left(\frac{1}{k} - \lambda_1^+\right) \|h\|^2_{E^+}$$

Or

$$\frac{1}{k} - \lambda_1^+ \geq \frac{1}{A} - \lambda_1^+ > 0$$

$Q_{1,k}(u^o,\cdot)$ est donc strictement convexe sur E^+ et atteint par conséquent son minimum sur E^+ en un unique v^+ vérifiant

$$(34) \quad P^+\left(|a|\Pi^2(v^++u^o) + \frac{v^+}{k} + \frac{f}{k}\right) = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$p^+(|a|\Pi^2 v^+) + \frac{v^+}{k} = -p^+(|a|\Pi^2 u^o) - p^+\left(\frac{f}{k}\right)$$

Soit N l'opérateur de E^+ dans lui-même défini par :

$$N(u^+) = p^+(|a|\Pi^2 u^+) + \frac{u^+}{k}$$

Comme on a

$$\langle Nu^+, u^+\rangle_{E^+} \geq \left(\frac{1}{k} - \lambda_1\right) \|u^+\|^2_{E^+} ,$$

N est un isomorphisme de E^+ et (34) équivaut à

$$v^+ = -N^{-1}(p^+(|a|\Pi^2 u^o)) - N^{-1}\left(p^+\left(\frac{f}{k}\right)\right) \tag{35}$$

Remarquons que, par linéarité,

$$N^{-1}(p^+(|a|\Pi^2 u^o) = N_1^{-1}(p_1^+(|a|\Pi^2 m))\xi$$

p_1^+ désignant l'opérateur de projection de E_1 sur E_1^+ et N_1 l'opérateur défini sur E_1 par

$$N_1(u_1^+) = p_1^+(|a|\Pi^2 u_1^+) + \frac{u_1^+}{k}$$

Posons

$$g_1 = N_1^{-1}(p^+(|a|\Pi^2 m)$$

et

$$h = -N^{-1}\left(p^+\left(\frac{f}{k}\right)\right)$$

(35) s'écrit donc

$$v^+ = -g_1\xi + h \quad .$$

Calculons alors la valeur du minimum de $Q_{1,k}(u^o,u^+)$. Tenant compte de (34) on obtient

$$Q_{1,k}(u^o,v^+) = -\frac{1}{2}\int_o^T (\Pi u^o+\Pi v^+)\Pi u^o + \frac{1}{2k}\int_{I^+} \frac{(v^++f)}{a} f\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_o^T |\Pi u^o|^2 + \frac{1}{2}\int_o^T \Pi^2 u^o(-g_1\xi+h) + \frac{1}{2k}\int_{I^+} (-g_1\xi+h+f)\frac{f}{a}\, dt$$

$$Q_{1,k}(u^o,v^+) = -\frac{1}{2}\left[\int_o^T |\Pi m|^2 + \int_o^T (\Pi^2 m)g_1\right] |\xi|^2 + x_1(f)\cdot\xi + x_2(f)$$

avec

$$x_1(f) = \frac{1}{2}\int_o^T (\Pi^2 m)h - \frac{1}{2k}\int_{I^+} \frac{g_1 f}{a}\, dt$$

et

$$x_2(f) = \frac{1}{2k}\int_{I^+} \frac{(f+h)f}{a}\, dt$$

Il est clair que $x_1(f)$ et $x_2(f)$ ne dépendent que de f et sont tous deux nuls si $f = 0$.

Il reste à expliciter $g_1 = N_1^{-1}(p_1^+(|a|\Pi^2 m))$. On a

$$g_1 = N_1^{-1}(p_1^+(|a|\Pi^2 m)) \Leftrightarrow N_1(g_1) = p_1^+(|a|\Pi^2 m)$$

$$\Leftrightarrow p_1^+(|a|\Pi^2 g_1) + \frac{g_1}{k} = p_1^+(|a|\Pi^2 m)$$

$$\Leftrightarrow \exists!\, c \in \mathbb{R} \text{ tel que } a(\Pi^2 g_1 - c) + \frac{g_1}{k} = a\Pi^2 m \quad \text{sur } I^+$$

$$\Leftrightarrow \exists!\, c \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = \Pi^2 g_1 - c \text{ soit solution de } \ddot{y} + kay = ka\Pi^2 m \quad \text{sur } I^+$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_1 = \ddot{y} \text{ ou } y \in C^{1,+}([0,T],\mathbb{R}) \text{ est solution de} \\ (31) \left\{ \begin{array}{l} y + kay = ka\Pi^2 m \quad \text{sur } I^+ \\ \int_o^T \dot{y} = 0 \\ y'' = 0 \text{ sur } I^- \text{ et } \int_{I^+} \ddot{y} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En notant $y_{1,k}$ la solution de (31) et

$$M_1(k) = \int_o^T |\Pi m|^2 + \int_o^T \Pi^2 m\, \ddot{y}_{1,k} = \int_o^T \Pi m(\Pi m - \dot{y}_{1,k})$$

on a bien

$$Q_{1,k}(u^o,v^+) = -\frac{1}{2} M_1(k)|\xi|^2 + x_1(f)\cdot\xi + x_2(f) \quad .$$

$M_1(k)$ est strictement positif car lorsque $f = 0$, et $u^o \neq 0$, on a :

$$\min_{u^+ \in E^+} Q_{1,k}(u^o,u^+) = -\frac{1}{2} M_1(k)|\xi|^2 < Q_{1,k}(u^o,0) < 0$$

LEMME 3.3.

Il existe une unique fonction $y_{2,k} \in C^{1,+}([0,T], \mathbb{R})$ solution de

$$(36) \qquad \begin{cases} \ddot{y} + kay = ka\Pi^2 m & \text{pp sur } I^- \\ \displaystyle\int_o^T \dot{y} = 0 & \\ \ddot{y} = 0 \quad \text{sur } I^+ \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_{I^-} \ddot{y} = 0 & \end{cases}$$

On note

$$(37) \qquad M_2(k) = \int_o^T \Pi m(\Pi m - \dot{y}_{2,k})$$

$M_2(k)$ est un réel strictement positif et pour $u^o = m\xi$ on a

$$(38) \qquad \max_{u^- \in E^-} Q_{2,k}(u^o,u^-) = -\frac{1}{2} M_2(k)|\xi|^2 + x_3(f)\cdot\xi + x_4(f)$$

où $x_3(f)$ et $x_4(f)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ indépendants de ξ, fonctions de f, tous deux nuls si $f = 0$.

DEMONSTRATION.

On suit la démarche de la démonstration qui précède. $Q_{2,k}(u^o,\cdot)$ est strictement concave sur E^- et on calcule la valeur de maximum, ce qui conduit à (38). $M_2(k)$ est strictement positif car lorsque $f = 0$ et $u^o \neq 0$, $Q_{2,k}(u^o,u^-)$ est toujours strictement négatif.

On peut alors démontrer :

THEOREME 3.4.

a et V vérifiant les hypothèses faites au paragraphe I avec $A < \frac{1}{\lambda_1^+}$, si l'une des conditions

$$(39) \qquad \frac{1}{k\alpha^+} - \frac{1}{K\alpha^-} > M_1(k)$$

ou

$$(40) \qquad \frac{1}{K\alpha^+} - \frac{1}{k\alpha^-} < M_2(k)$$

est réalisée, le problème (1) admet pour tout $f \in E$ au moins une solution.

DEMONSTRATION.

Les relations (29) du lemme 3.1 et (33) du lemme 3.2 donnent

$$\varphi(u^o) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k\alpha^+} - \frac{1}{K\alpha^-} - M_1(k)\right]|\xi|^2 - C|\xi| - C$$

Donc si

$$\frac{1}{k\alpha^+} - \frac{1}{K\alpha^-} > M_1(k)$$

on a

$$\lim_{\|u^o\| \to +\infty} \varphi(u^o) = +\infty$$

et φ atteint donc son minimum sur E^o, espace de dimension finie. On en déduit (Théorème 3.1) l'existence d'un point critique pour Φ donc d'une solution au problème 1 (proposition 2.3).

De même on a ((30) et ((38))

$$\varphi(u^o) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{K\alpha^+} - \frac{1}{k\alpha^-} - M_2(k)\right]|\xi|^2 + C|\xi| + C$$

et si $\frac{1}{K\alpha^+} - \frac{1}{k\alpha^-} < M_2(k)$, φ atteint son maximum sur E^o et la conclusion est la même.

Les conditions (39) et (40) ne sont pas explicites et les quantités $M_1(k)$ et $M_2(k)$ ne seront pas toujours faciles à déterminer dans la pratique. Il faut en effet résoudre les systèmes (31) et (36). On trouvera dans [15] différentes estimations conduisant à des résultats moins généraux mais d'interprétation plus claire que celle des conditions (39) et (40). On utilisera ici deux de ces estimations qui conduisent à des conditions explicites. Notons à cet effet

$$(41) \qquad M_3 = \lambda_1\left(\frac{1}{\alpha^+} + \frac{1}{\alpha^-}\right)$$

$$(42) \qquad M_4 = \int_{I^+} |\Pi^+ m|^2$$

où $\Pi^+ m = \Pi m - \frac{1}{(\text{mes } I^+)} \int_{I^+} \Pi m$.

LEMME 3.5.

On a :

1) Si $k < \frac{1}{\lambda_1}$ $\qquad M_1(k) < M_3$

2) $\qquad M_4 < M_2(k)$

DEMONSTRATION.

1) Dans le cas où $f = 0$ on a

$$Q_{1,k}(u^o,u^+) = -\frac{1}{2}\int_o^T |\Pi u^o+\Pi u^+|^2 + \frac{1}{2k}\int_o^T \frac{|u^+|^2}{|a|}$$

$$\geq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\lambda_1\right)\|u^+\|_E^2 - \frac{\lambda_1}{2}\|u^o\|_E^2$$

donc si $k < \frac{1}{\lambda_1}$

$$Q_{1,k}(u^o,u^+) \geq -\frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right)|\xi|^2$$

En comparant avec (33) on obtient

$$M_1(k) \leq M_3$$

2) On a

$$Q_{2,k}(u^o,u^-) \leq -\frac{1}{2}\int_o^T |\Pi u^o+\Pi u^-|^2$$

donc

$$\max_{u^- \in E^-} Q_{2,k}(u^o,u^-) \leq \max_{v \in F} -\frac{1}{2}\int_o^T |\Pi u^o+v|^2$$

avec

$$F = \{v \in L^2_o(]0,T[,\mathbb{R}^n) \;/\; v = \text{constante sur } I^+\}$$

Mais le maximum de $-\frac{1}{2}\int_o^T |\Pi u^o+v|^2$ sur F est atteint en l'unique $w \in F$ tel que

$$\Pi u^o + w = 0 \qquad \text{sur } I^-$$

donc

$$w = \begin{cases} -\Pi u^o & \text{sur } I^- \\ -\dfrac{1}{(\text{mes } I^+)}\displaystyle\int_{I^+} u^o & \text{sur } I^+ \end{cases}$$

et

$$-\frac{1}{2}\int |\Pi u^o+w|^2 = -\frac{1}{2}\int_{I^+} |\Pi^+ m|^2\,|\xi|^2$$

On a ainsi

$$\max_{u^- \in E^-} Q_{2,k}(u^o,u^-) \leq -\frac{1}{2} M_4|\xi|^2$$

et en comparant avec (38)

$$M_4 \leq M_2(k)$$

Introduisons les notations :

$$(43)\qquad \begin{cases} k_3 = \dfrac{1}{\lambda_1}\,\dfrac{\alpha^- - \alpha^+}{\alpha^- + \alpha^+} \\ K_3(k) = \dfrac{1}{\alpha^-}\left[\dfrac{1}{k\alpha^+} - M_3\right]^{-1} \\ k_4 = \dfrac{1}{M_4}\left[\dfrac{1}{\alpha^+} - \dfrac{1}{\alpha^-}\right] \\ K_4(k) = \dfrac{1}{\alpha^+}\left[\dfrac{1}{k\alpha^-} + M_4\right]^{-1} \end{cases}$$

On peut énoncer :

THEOREME 3.6.

Les hypothèses étant celles du théorème 3.4,

1) On suppose $\alpha^- > \alpha^+$ et $k < k_3$. Alors si $K > K_3(k)$, le problème (1) admet au moins une solution.

2) On suppose $\alpha^- \leq \alpha^+$ ou $\alpha^- > \alpha^+$ et $k > k_4$. Alors si $K > K_4(k)$, le problème (1) admet au moins une solution.

DEMONSTRATION.

1) Il est clair d'après ce qui précède que si

$$k < \frac{1}{\lambda_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{k\alpha^+} - \frac{1}{K\alpha^-} > M_3$$

il y a existence d'au moins une solution au problème (1). Il suffit alors d'analyser cette condition. Comme $K \leq k$, on doit avoir

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\alpha^+} - \frac{1}{\alpha^-}\right) > M_3$$

Il est donc nécessaire que

$$\alpha^- > \alpha^+$$

et

$$k < k_3$$

Cette dernière condition entraîne $k < \frac{1}{\lambda_1}$, et il faut et il suffit ensuite que K vérifie

$$K_3(k) < K < k$$

2) Le raisonnement est identique.

---

4. ETUDE DU CAS $f = 0$.

Notons (1') le problème obtenu pour $f = 0$

$$(1') \qquad \begin{cases} \ddot{x} + aV'(x) = 0 \\ x(0) = x(T) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases}$$

Ce problème a une solution triviale $x \equiv 0$, le point critique de Φ associé étant nul, le point critique de φ correspondant également. Se pose donc le problème de la non trivialité du point critique de φ obtenu par minimisation ou maximisation. Or on sait que φ est de classe C^2, et que son indice et son coindice à l'origine sont respectivement égaux à l'indice et au coindice de la restriction de la forme quadratique $\Phi''(0)$:

$$\Phi''(0)hh = \int_0^T [-(\Pi h)^2 + [V''(0)]^{-1} \frac{hh}{a}]$$

à l'orthogonal pour cette forme de l'espace $E^+ \oplus E^-$.

Il n'est pas en général aisé de déterminer dans la pratique cet indice et ce coindice, on a alors recours à des estimations de φ à l'origine.

Signalons auparavant un cas où la méthode décrite ci-dessus donne la solution triviale : c'est le cas $\alpha^- < \alpha^+$, car on a dans ce cas :

$$\varphi(u^o) < 0 = \varphi(0)$$

et le maximum de φ est donc atteint en 0.

En effet :

$$\varphi(u^o) < \max_{u^- \in E^-} \Phi(u^o+u^-) < \max_{u^- \in E^-} \Phi_2(u^o+u^-)$$

$$\Phi_2(u^o+u^-) = \int_{I^+} aW(\frac{u^o}{a}) + \int_{I^-} aW(\frac{u^o+u^-}{a})$$

$$= \alpha^+ W(\frac{\xi}{\alpha^+}) + \int_{I^-} aW(\frac{u^o+u^-}{a})$$

La convexité de W permet d'écrire

$$W(\frac{u^o+u^-}{a}) > W(\frac{u^o}{a}) + W'(\frac{u^o}{a}) \frac{u^-}{a}$$

et en intégrant

$$\int a(t)\, W(\frac{u^o+u^-}{a}) < \int a\, W(\frac{u^o}{a}) = -\alpha^- W(\frac{\xi}{\alpha^-})$$

donc

$$\Phi_2(u^o+u^-) < \alpha^+ W(\frac{\xi}{\alpha^+}) - \alpha^- W(\frac{\xi}{\alpha^-})$$

et lorsque $\alpha^- < \alpha^+$,

$$\Phi_2(u^o+u^-) < 0,$$

encore par convexité. D'où le résultat.

On notera dans ce qui suit :

$$\begin{cases} V''(0) = A_o \\ W''(0) = B_o = A_o^{-1} \\ K_o \text{ et } k_o \text{ respectivement la plus petite et la plus grande} \\ \text{valeur propre de } A_o \end{cases}$$

On a donc :

$$\frac{1}{k_o} I < B_o < \frac{1}{K_o} I$$

On note également ((28))

$$Q_{1,0}(u^o,u^+) = Q_{1,k_o}(u^o,u^+)$$

$$Q_{2,0}(u^o,u^-) = Q_{2,k_o}(u^o,u^-)$$

On a alors :

LEMME 4.1.

φ vérifie au voisinage de zéro dans E_o : $(u^o = m\xi\ ,\ \xi \in \mathbb{R}^n)$

(44) $$\varphi(u^o) \geq \min_{u^+ \in E^+} Q_{1,0}(u^o,u^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+} - \frac{1}{\alpha^-}\right) B_o\xi\xi + O(|\xi|^2)$$

(45) $$\varphi(u^o) \leq \max_{u^- \in E^-} Q_{2,0}(u^o,u^-) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+} - \frac{1}{\alpha^-}\right) B_o\xi\xi + O(|\xi|^2)$$

DEMONSTRATION.

On sait que $\forall\, u^+ \in E^+\ ,\ \forall\, u^- \in E^-$,

$$\phi(u^o+u^+(u^o)+u^-) \leq \varphi(u^o) \leq \phi(u^o+u^++u^-(u^o))$$

Donc

$$\phi(u^o+u^+(u^o)) \leq \varphi(u^o) \leq \phi(u^o+u^-(u^o))$$

Or

$$\phi(u^o+u^+(u^o)) = \phi_1(u^o+u^+(u^o)) + \phi_2(u^o+u^+(u^o))$$

$$\phi_2(u^o+u^+(u^o)) = \int_o^T a\, W\!\left(\frac{u^o+u^+(u^o)}{a}\right)$$

Quand u^o tend vers zéro dans E^o , $\dfrac{u^o+u^+(u^o)}{a}$ tend vers zéro dans L^∞ (Proposition 2.1). On en déduit, en écrivant qu'au voisinage de 0 :

$$W(y) = \frac{1}{2}\, Byy + O(|y|^2)\ ,$$

$$\phi_2(u^o+u^+(u^o)) = \frac{1}{2}\int_o^T \frac{B_o(u^o+u^+(u^o))(u^o+u^+(u^o))}{a} + O(\|u^o\|^2)$$

ce qui s'écrit encore

$$\phi_2(u^o+u^+(u^o)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) B_o\xi\xi + \frac{1}{2}\int_o^T \frac{B_o u^+(u^o)u^+(u^o)}{a} + O(|\xi|^2)$$

donc

$$\phi_2(u^o+u^+(u^o)) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) B_o\xi\xi + \frac{1}{2k_o}\int \frac{|u^+(u^o)|^2}{a} + O(|\xi|^2)$$

d'où, en regroupant, l'inégalité (44).

On obtient de la même façon l'inégalité (45).

THEOREME 4.2.

Les hypothèses étant celles du théorème 3.4 dans chacun des deux cas suivants

$(C_{1,0})$ $$\frac{1}{k\alpha^+} - \frac{1}{K\alpha^-} > M_1(k) \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) < M_2(k_o)$$

$(C_{2,0})$ $$\frac{1}{K\alpha^+} - \frac{1}{k\alpha^-} < M_2(k) \quad \text{et} \quad \frac{1}{K_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) > M_1(k_o)$$

il y a existence d'une solution non triviale au problème (1').

DEMONSTRATION.

Supposons que $(C_{1,0})$ soit vérifiée. Dans ce cas on a

$$\lim_{\|u^o\| \to +\infty} \varphi(u^o) = +\infty$$

et φ atteint son minimum sur E^o .

D'autre part au voisinage de zéro on a

$$\varphi(u^o) \leq -\frac{1}{2} M_2(k_o)|\xi|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) B_o\xi\xi + O(|\xi|^2)$$

Soit ξ_1 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$B_o\xi_1 = \frac{1}{k_o}\,\xi_1$$

et

$$\|\xi_1\| = 1$$

Pour tout s réel on a

$$\varphi(sm\xi_1) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) - M_2(k_o)\right] s^2 + O(s^2)$$

On en déduit pour s suffisamment petit $\varphi(sm\xi_1) < 0$ et l'origine n'est donc pas un minimum de φ .

φ a donc un point critique non nul et le problème (1') une solution non triviale.

Le second cas se traite de la même façon en considérant $\varphi(s\omega\xi_2)$ où ξ_2 vérifie $B_o\xi_2 = \frac{1}{K_o}\xi_2$.

REMARQUE 4.3.

On peut vérifier que ce théorème ne s'applique pas dans le cas d'un V quadratique. Montrons, par exemple, que si $(C_{1,0})$ est vérifiée, alors on a $k_o > k$.

Supposons le contraire, on a alors

$$\frac{1}{k_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) > \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) > \frac{1}{k\alpha^+}-\frac{1}{K\alpha^-} > M_1(k)$$

Mais on voit facilement que $M_1(\cdot)$ est une fonction constante, donc

$$\frac{1}{k_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) > M_1(k_o)$$

et cette condition implique que l'origine est un minimum local pour φ, ce qui, d'après la démonstration du théorème, n'est pas le cas lorsque $(C_{1,0})$ est vérifiée.

De même, on peut voir que si $(C_{2,0})$ est vérifiée, on a soit $k_o > k$, soit $K_o < K$.

Dans l'esprit des lemme 3.5 et théorème 3.6, on peut énoncer :

THEOREME.

Les hypothèses étant celles du théorème 3.4 avec de plus $\alpha^- > \alpha^+$, on a

1) Si

$$k < k_3 \qquad K > K_3(k)$$

et si la plus grande valeur propre k_o de $V''(0)$ vérifie

$$k_o > k_4$$

le problème (1') admet une solution non triviale.

2) Si

$$k > k_4 \qquad K > K_4(k)$$

et si la plus petite valeur propre K_o de $V''(0)$ vérifie

$$K_o < k_3$$

le problème (1') admet une solution non triviale.

DEMONSTRATION.

Elle découle de celle du théorème 3.6. La condition $k_o > k_1$ assure que l'origine n'est pas un minimum local de φ, la condition $K_o < k_3$ qu'il n'est pas un maximum local.

5. CAS OU V EST ASYMPTOTIQUEMENT QUADRATIQUE A L'INFINI.

On fait l'hypothèse supplémentaire suivante sur V :

(V_∞)
$$\begin{cases} V'(x) = A_\infty x + O(x) \quad \text{où} \quad \lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{O(x)}{|x|} = 0 \\ \text{et où } A_\infty \in L_s(\mathbb{R}^n) \text{ vérifie d'une part} \\ \qquad KI \leq K_\infty I \leq A_\infty \leq k_\infty I \leq kI \\ \text{et d'autre part la condition dite de non résonnance : il} \\ \text{n'existe pas de solution non nulle au système} \\ \qquad \begin{cases} \ddot{x} + a(t)A_\infty x = 0 \\ x(0) = x(T) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases} \end{cases}$$

On a alors :

LEMME 5.1.

$W = V^*$ vérifie

$$(46) \qquad \begin{cases} W'(y) = B_\infty y + O(y) \\ \text{avec} \quad B_\infty = A_\infty^{-1} \quad \text{et} \quad \lim\limits_{|y|\to+\infty}\frac{|O(y)|}{|y|} = 0 \end{cases}$$

DEMONSTRATION.

Tout d'abord, de l'inégalité $|V'(x)| \leq A|x|$ on déduit en utilisant (7) :

$$\lim_{|y| \to +\infty} |W'(y)| = +\infty$$

Soient alors $y \in E$ et $x = W'(y)$. De la relation

$$y = V'(x) = A_\infty x + 0(x)$$

on tire

$$W'(y) = A_\infty^{-1} y + A_\infty^{-1} 0(W'(y))$$

Mais

$$\frac{|A_\infty^{-1}\, 0(W'(y))|}{|y|} \leq \frac{1}{K_\infty} \frac{|W'(y)|}{|y|} \frac{|0(W'(y))|}{|W'(y)|}$$

$$\leq \frac{1}{K_\infty} \frac{1}{\varepsilon} \frac{|0(W'(y))|}{|W'(y)|}$$

et donc

$$\lim_{|y| \to +\infty} \frac{|A^{-1}\, 0(W'(y))|}{|y|} = 0$$

d'où le résultat.

Rappelons que l'on a noté L l'opérateur défini sur E par

$$Lu = -|a| \left(\Pi^2 u - \frac{1}{\alpha} \int_0^T |a| \Pi^2 u\right)$$

et définissons l'opérateur T sur E par

$$Tu = |a| \left(B_\infty \frac{u}{a} - \frac{1}{\alpha} \int_0^T \frac{|a|}{a} B_\infty u \, dt\right)$$

LEMME 5.1.

L'opérateur $(-L+T)$ est un isomorphisme de E.

DEMONSTRATION.

On sait que L est un opérateur compact (I. Proposition 2.1), vérifions que T est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Soients u, v appartenant à E. L'équation $Tu = v$ équivaut à

$$v = |a| \left(B_\infty \frac{u}{a} - \xi\right) \qquad \text{avec } \xi \in \mathbb{R}^n$$

soit

(47) $$u = \frac{a}{|a|} A_\infty v + a A_\infty \xi$$

En intégrant entre 0 et T on obtient

(48) $$(\alpha^+ - \alpha^-) A_\infty \xi = -\int_0^T \frac{a}{|a|} A_\infty v$$

Si $\alpha^- \neq \alpha^+$, (47) et (48) déterminent l'unique u vérifiant $Tu = v$, et T est dans ce cas un isomorphisme.

Si $\alpha^- = \alpha^+$, on vérifie aisément que le noyau de T n'est autre que l'espace E^o, et son image l'espace $E^+ + E^-$. L'opérateur T est donc Fredholm d'indice zéro.

On en déduit que l'opérateur $(-L+T)$ est dans les deux cas un opérateur de Fredholm d'indice zéro. D'autre part, on a :

$$(-L+T)u = 0 \Leftrightarrow \Pi^2 u + B_\infty \frac{u}{a} = \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \Pi^2 u - \xi \quad \text{est solution de} \\ \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + a A_\infty x = 0 \\ x(0) = x(T) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et puisque A_∞ vérifie l'hypothèse de non résonnance, $(-L+T)$ est injectif.

On en déduit que $(-L+T)$ est un isomorphisme de E.

PROPOSITION 5.2.

Toute suite u_i d'éléments de E pour laquelle $\Phi'(u_i)$ tend vers zéro admet une sous-suite convergente. La fonctionnelle Φ vérifie donc la condition (C) de Palais Smale.

DEMONSTRATION.

On a

$$\Phi'(u) = -Lu + |a| \left(W'\left(\frac{u}{a}\right) - \frac{1}{\alpha} \int_0^T |a|\, W'\left(\frac{u}{a}\right)\right)$$

donc

$$\Phi'(u) = (-L+T)u + R(u)$$

en notant

$$R(u) = |a| \left| O\left(\frac{u}{a}\right) - \frac{1}{\alpha} \int_0^T |a|\, O\left(\frac{u}{a}\right) \right|$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C telle que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \qquad |O(y)| \leq \varepsilon |y| + C$$

on en déduit facilement

$$\|R(u)\|_E \leq 2\varepsilon \|u\|_E + C$$

Mais (49) donne

$$u = (-L+T)^{-1} (\Phi'(u) - R(u))$$

donc

$$\|u\|_E \leq \|(-L+T)^{-1}\| \, (\|\Phi'(u)\| + \|R(u)\|)$$

d'où

$$\|\Phi'(u)\| \geq (\|(-L+T)^{-1}\|^{-1} - 2\varepsilon)\, \|u\|_E - C\,.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon < \dfrac{\|(-L+T)^{-1}\|^{-1}}{2}$ pour obtenir

$$\lim_{\|u\|_E \to +\infty} \|\Phi'(u)\| = +\infty$$

Soit alors une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que

$$\Phi'(u_i) \to 0 \qquad \text{dans } E$$

D'après ce qui précède la suite u_i est bornée, on peut donc supposer qu'elle converge faiblement dans E vers un élément u. Mais on a $\forall\, i \in \mathbb{N}$

$$\Phi'(u_i) = |a| \left[\Pi^2 u_i + W'\left(\frac{u_i}{a}\right) - \xi_i\right] \tag{50}$$

avec

$$\xi_i = \frac{1}{\alpha} \int_0^T |a| \left[\Pi^2 u_i - W'\left(\frac{u_i}{a}\right)\right]$$

Il est clair que la suite ξ_i est bornée, on suppose donc qu'elle converge dans $\mathbb{R}^n$. (50) équivaut alors à

$$u_i = |a|\, V'\left(\frac{\Phi'(u_i)}{|a|} - \Pi^2 u_i + \xi_i\right)$$

Posons

$$w_i = \frac{\Phi'(u_i)}{|a|^{1/2}} + |a|^{1/2}(-\Pi^2 u_i + \xi_i)$$

Il est clair que w_i converge fortement dans L^2, et que

$$\frac{u_i}{|a|^{1/2}} = \frac{a}{|a|^{1/2}}\, V'\left(\frac{w_i}{|a|^{1/2}}\right)$$

On vérifie facilement que pour tout $w \in L^2$, $\dfrac{a}{|a|^{1/2}}\, V'\left(\dfrac{w}{|a|^{1/2}}\right)$ appartient à L^2.

Un théorème de Krasnoselski ([4]) assure qu'alors l'application $w \to \dfrac{a}{|a|^{1/2}}\, V'\left(\dfrac{w}{|a|^{1/2}}\right)$ est continue de L^2 dans L^2. On en déduit que u_i converge dans E.

La fonctionnelle Φ vérifie donc une condition plus forte que la condition (C) de Palais Smale. En effet cette condition de Palais Smale est la suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \|u_i\|_E \leq C \\ \Phi'(u_i) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_i \text{ possède une sous-suite convergente}$$

COROLLAIRE 5.3.

φ vérifie la condition (C) de Palais Smale.

DEMONSTRATION.

Soit $(u_i^o)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E^o telle que $\varphi'(u_i)$ converge vers zéro dans E^o. On a ((22))

$$\varphi'(u_i^o) = \Phi'(u_i)$$

avec

$$u_i = u^+(u_i^o) + u^-(u_i^o) + u_i^o$$

D'après la proposition qui précède, la suite u_i admet une sous-suite convergente dans E, donc $u_i^o = p^o(u_i)$ admet une sous-suite convergente dans E^o, ce qui démontre le corollaire.

On note $Q_{1,\infty} = Q_{1,k_\infty}$; $Q_{2,\infty} = Q_{2,k_\infty}$. On a :

LEMME 5.4.

Au voisinage de l'infini φ vérifie : (on note $u^o = m\xi$)

(51) $$\varphi(u^o) \geq \min_{u^+ \in E^+} Q_{1,\infty}(u^o,u^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) B_\infty\xi\xi + 0(|\xi|^2)$$

(52) $$\varphi(u^o) \leq \max_{u^- \in E^-} Q_{2,\infty}(u^o,u^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) B_\infty\xi\xi + 0(|\xi|^2)$$

DEMONSTRATION.

De la propriété $W'(y) = B_\infty y + 0(y)$ on déduit :

$$W(y) = \frac{1}{2} B_\infty yy + 0(|y|^2) \qquad \text{à l'infini.}$$

On utilise alors la propriété

$$\varphi(u^o) \geq \phi(u^o+u^+(u^o))$$

qui donne

$$\varphi(u^o) \geq \phi_1(u^o+u^+(u^o)) + \frac{1}{2}\int_o^T \frac{1}{a} B_\infty(u^o+u^+(u^o))(u^o+u^+(u^o))\,dt$$

$$+ \int_o^T a\; 0\left(\left|\frac{u^o+u^+(u^o)}{a}\right|^2\right) dt$$

donc

$$\varphi(u^o) \geq \phi_1(u^o+u^+(u^o)) + \frac{1}{2k_\infty}\|u^+(u^o)\|_E^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) B_\infty\xi\xi + 0(|\xi|^2.$$

On en déduit (51).

On démontre (52) en écrivant $\varphi(u^o) \leq \phi(u^o+u^-(u^o))$.

On peut alors énoncer :

THEOREME 5.5.

On suppose que V vérifie les hypothèses $(V_1),(V_2),(V_\infty)$ avec $A < \frac{1}{\lambda_1^+}$.
Dans chacun des deux cas suivants :

1°) $$\frac{1}{k_\infty}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) < M_2(k_\infty) \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) > M_1(k_o)$$

2°) $$\frac{1}{K_\infty}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) > M_1(k_\infty) \quad \text{et} \quad \frac{1}{K_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) < M_2(k_o)$$

le problème (1') admet au moins une solution non triviale.

DEMONSTRATION.

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse (V_∞) implique que (V_3) est réalisée pour tous réels k et K vérifiant

$$K < K_\infty \leq k_\infty < k$$

Cas 1°) : Le lemme 4.1 montre que la relation $\frac{1}{k_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) > M_1(k_o)$ entraine que l'origine est un minimum local strict pour φ^o.

D'autre part, notons ξ_1 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$B_\infty\xi_1 = \frac{1}{k_\infty}\,\xi_1 \qquad \text{et} \qquad \|\xi_1\| = 1$$

D'après le lemme qui précède et le lemme 3.3, pour $s \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(sm\xi_1) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k_\infty}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) - M_2(k_\infty)\right] s^2 + 0(s^2)$$

avec

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{0(s^2)}{s^2} = 0$$

On en déduit si $\frac{1}{k_\infty}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) < M_2(k_\infty)$ que

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(sm\xi_1) = -\infty$$

et en particulier qu'il existe un $s_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour $u_1^o = s_1 m\xi_1$ on ait

$$\varphi(u_1^o) < 0$$

Comme φ vérifie la condition de Palais Smale, on peut appliquer le théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz [3] et conclure à l'existence d'un point critique non nul pour φ . D'où le résultat.

Cas 2°) : Le raisonnement est le même. L'origine est un maximum local strict puisque

$$\frac{1}{K_o}\left(\frac{1}{\alpha^+}-\frac{1}{\alpha^-}\right) < M_2(k_o)$$

Si $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$B_\infty \xi_2 = \frac{1}{K_\infty} \xi_2 \quad \text{et} \quad \|\xi_2\| = 1$$

pour un $s_2 \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, on a

$$\varphi(s_2 m \xi_2) > 0 \qquad \text{((lemmes 5.4 et 3.2))}$$

et le théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz s'applique.

REMARQUE 5.6.

On peut vérifier (remarque 4.3) que ce théorème ne s'applique pas dans le cas où V est quadratique.

On a également le théorème moins général :

THEOREME 5.7.

Les hypothèses étant celles du théorème 5.5, le problème (1') admet au moins une solution non triviale dans chacun des deux cas :

1°) $k_\infty > k_4$ et $k_o < k_3$

2°) $K_\infty < k_3$ et $K_o > k_4$

Bibliographie

[1] H. Amann, "Saddle points and multiple solutions of Differential equations". Math. Z. 169 (1979), pp. 127-166.

[2] H. Amann et E. Zendher, "Nontrivial Solutions for a Class of Nonresonance Problems and Applications to Nonlinear Differential Equations". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 7 (1980), pp. 539-603.

[3] A. Ambrosetti et P.H. Rabinowitz, "Dual variational methods in critica point theory and applications". J. Functional Analysis 14 (1973), pp. 349-381.

[4] J.P. Aubin et I. Ekeland, "Applied Nonlinear Analysis". Wiley (1984).

[5] A. Bahri et H. Beresticky, "Existence of forced oscillations for some nonlinear differential equations". Comm. Pure Appl. Math..

[6] H. Brézis, "Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contraction dans les espaces de Hilbert". North-Holland. Math. Studies.

[7] H. Brézis, "Analyse fonctionnelle". Masson (1983).

[8] D.C. Clark, "Periodic Solutions of Variational Systems of Ordinary Differential Equations". J. Diff. Equ. 28 (1978), pp. 354-368.

[9] F. Clarke, "Periodic Solutions to hamiltonian inclusions". J. Diff. Equ. 40 (1981), pp. 1-6.

[10] F. Clarke et I. Ekeland, "Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period". Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), pp. 103-116.

[11] F. Clarke et I. Ekeland, "Nonlinear oscillations and boundary value problems for hamiltonian systems". Arch. Rat. Mech. Anal. (1980), pp. 315-333.

[12] M. Combescure, "Trapping of quantum particles for a class of time-periodic potentials. A semi-classical approach". Ann. I.H.P. (1987).

[13] Dunford et Schwartz, "Linear operators". Pure and applied Mathematics, Vol III, Part I.

[14] I. Ekeland et R. Temam, "Analyse convexe et problèmes variationnels". Dunod. Gauthier-Villars (1972).

[15] L. Lassoued, Thèse d'Etat - Université Paris IX.

[16] P.H. Rabinowitz, "On subharmonic solutions of Hamiltonian systems". Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), pp. 609-633.