INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION
INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
I.C.T.P., P.O. BOX 586, 34100 TRIESTE, ITALY, CABLE: CENTRATOM TRIESTE

SMR.398/6

TOPICAL MEETING ON VARIATIONAL PROBLEMS IN ANALYSIS

(28 August - 8 September 1989)

A Semilinear Elliptic Problem without Growth Condition

Jean-Pierre Gossez
Départment de Matematiques
Université Libre de Bruxelles
1050 Bruxelles
BELGIUM

These are preliminary lecture notes, intended only for distribution to participants

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 277-280, 1989

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Un problème elliptique semi-linéaire sans condition de croissance

Djairo DE FIGUEIREDO et Jean-Pierre GOSSEZ

Résumé — On étudie la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation $-\Delta u = f(u) + h$ dans le cas où la non-linéarité f ne satisfait aucune condition de croissance.

A semilinear elliptic problem without growth condition

Abstract — *We study the solvability of the Dirichlet problem for the equation $-\Delta u = f(u) + h$ in the case where no growth condition is imposed on the nonlinearity f.*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geqq 2$, et soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'existence d'une solution pour le problème de Dirichlet

$$(1) \qquad -\Delta u = f(u) + h(x) \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où h est une fonction (ou distribution) donnée sur Ω. Le potentiel associé $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ est supposé satisfaire la condition de non-résonance

$$(2) \qquad \limsup_{s \to \pm\infty} \frac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1,$$

où λ_1 désigne la première valeur propre de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$.

THÉORÈME. — *On suppose* (2). *Alors, pour chaque $h \in L^\infty(\Omega)$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $f(u) \in L^1(\Omega)$, $f(u)u \in L^1(\Omega)$ et u satisfait* (1) *au sens suivant :*

$$(3) \qquad \int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f(u)v + \int_\Omega hv$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour $v = u$.

L'existence d'une solution est bien connue lorsqu'en plus f vérifie la condition de croissance

$$(4) \qquad |f(s)| \leqq a|s|^{q-1} + b$$

où $q < \infty$ si $N = 2$ et $q = 2N/(N-2)$ si $N \geqq 3$. La fonctionnelle correspondante

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) - \int_\Omega hu$$

est alors C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et par conséquent tout minimum de Φ sur $H_0^1(\Omega)$ [qui existe d'après (2)] satisfait (1) (*voir* par exemple [1]). Divers travaux ont été consacrés à l'introduction de non-linéarités fortes dans les termes d'ordre inférieur d'une équation elliptique (*voir* par exemple [2] à [9]). Dans chacun de ceux-ci une certaine condition de croissance d'un seul côté est imposée à f, par exemple la condition de signe $f(s)s \leqq 0$ introduite dans [2], ou la condition $f(s)\operatorname{sgn} s \leqq \zeta(s) + c$ [ou $f(s)\operatorname{sgn} s \geqq -\zeta(s) - c$] où $\zeta(s) = o(|s|^{2^*})$ à l'infini considérée récemment dans [9]. L'intérêt du théorème ci-dessus réside en l'absence totale de restriction à la croissance de f.

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0249-6291/89/03080277 \$ 2.00 © Académie des Sciences

Le théorème résulte des quatre propositions ci-dessous, qui correspondent à divers comportements de f à l'infini.

PROPOSITION 1. — *On suppose*

$$\inf_{s \geqq 0} f(s) = -\infty, \qquad \sup_{s \leqq 0} f(s) = +\infty. \tag{5}$$

Alors, pour chaque $h \in L^\infty(\Omega)$, *il existe* $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *qui satisfait* (1) *au sens faible usuel* [*c'est-à-dire* (3) *a lieu pour tout* $v \in H_0^1(\Omega)$].

Démonstration. — D'après (5) il existe $a<0<b$ tels que $f(a) \geqq \|h\|_\infty$ et $f(b) \leqq -\|h\|_\infty$. Posons $\hat{f}(s)=f(s)$ pour $s \in [a, b]$, $\hat{f}(s)=f(a)$ pour $s<a$ et $f(s)=f(b)$ pour $s>b$. Le problème

$$-\Delta u = \hat{f}(u) + h(x) \quad \text{dans } \Omega, \qquad u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{6}$$

admet une solution u (au sens faible usuel) puisque $\hat{f}$ satisfait (2) et (4). On va montrer que $a \leqq u(x) \leqq b$ p. p. dans Ω, d'où u est solution du problème initial (1). Démontrons la seconde de ces inégalités (argument analogue pour la première). Posons $u_b(x)=u(x)$ si $u(x) \leqq b$ et $u_b(x)=b$ si $u(x)>b$. Posons aussi $w=u-u_b$. Il suit de (6) que

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla w = \int_\Omega (\hat{f}(u)+h)\, w.$$

Chaque intégrale ci-dessus porte sur $\{x \in \Omega;\ u(x)>b\}$, domaine dans lequel $\nabla u = \nabla w$, $\hat{f}(u)+h \leqq 0$ et $w \geqq 0$. Il s'ensuit que $\int_\Omega |\nabla w|^2 \leqq 0$, d'où $w=0$ p. p.

Q.E.D.

PROPOSITION 2. — *On suppose* (2) *et*

$$\inf_{s \geqq 0} f(s) > -\infty, \qquad \sup_{s \leqq 0} f(s) < +\infty. \tag{7}$$

Alors, pour chaque $h \in H^{-1}(\Omega)$, *il existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $f(u) \in L^1(\Omega)$, $f(u)u \in L^1(\Omega)$ *et* (3) *a lieu pour tout* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et pour* $v=u$. *De plus, u minimise* Φ *sur* $H_0^1(\Omega)$.

Cette proposition est un cas particulier d'un résultat de [9].

PROPOSITION 3. — *On suppose* (2) *en* $-\infty$ *et*

$$\inf_{s \geqq 0} f(s) = -\infty, \qquad \sup_{s \leqq 0} f(s) < \infty. \tag{8}$$

Alors, pour chaque $h \in L^r(\Omega)$ ***borné supérieurement*** (*où* $r>1$ *si* $N=2$ *et* $r=2N/(N+2)$ *si* $N \geqq 3$), ***il existe*** $u \in H_0^1(\Omega)$ ***borné supérieurement tel que*** $f(u) \in L^1(\Omega)$, $f(u)u \in L^1(\Omega)$ ***et*** (3) ***a lieu pour tout*** $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ***et pour*** $v=u$.

Démonstration. — D'après (8) il existe $b>0$ tel que $f(b) \leqq -\sup h$. Posons $\hat{f}(s)=f(s)$ pour $s \leqq b$ et $\hat{f}(s)=f(b)$ pour $s>b$. Par la proposition 2 il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\hat{f}(u) \in L^1(\Omega)$, $\hat{f}(u)u \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega \hat{f}(u) v + \int_\Omega hv \tag{9}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour $v=u$. On va montrer que $u(x) \leqq b$ p. p. dans Ω, d'où u est solution du problème initial (1). Posons $T = -\Delta u - h \in H^{-1}(\Omega)$. D'après (9),

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega \hat{f}(u) \varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ [où $\langle\ ,\ \rangle$ représente la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$], ce qui montre que $T=\hat{f}(u)$ en tant que distributions. Définissons, comme dans la démonstration de la proposition 1, $w=u-u_b$. On a $\hat{f}(u)w \in L^1(\Omega)$. En effet $\hat{f}(u)w=0$ dans $\{x\in\Omega;\ u(x)=0\}$, et dans $\{x\in\Omega;\ u(x)\neq 0\}$ on a

$$|\hat{f}(u)w|=|\hat{f}(u)u|\,|w/u|\leqq|\hat{f}(u)u|\in L^1(\Omega).$$

Il suit alors du théorème de Brezis-Browder [10] que

$$\langle T, w\rangle=\int_\Omega \hat{f}(u)\,w,$$

c'est-à-dire que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla w=\int_\Omega \hat{f}(u)\,w+\int_\Omega hw.$$

On peut alors poursuivre l'argument comme dans la démonstration de la proposition 1.

Q.E.D.

La proposition 4 est analogue à la proposition 3 et concerne le cas où f est borné inférieurement sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas borné supérieurement sur $\mathbb{R}^-$.

Remarques. — (i) La condition (2) n'intervient pas dans la proposition 1. De plus, pour $h\in L^\infty(\Omega)$ donné, l'hypothèse (5) peut clairement être affaiblie.

(ii) La solution construite dans la démonstration de la proposition 1 peut ne pas correspondre à un minimum de Φ, comme le montre l'exemple ci-dessous.

(iii) L'opérateur $-\Delta$ peut être remplacé dans (1) par un opérateur différentiel linéaire du second ordre sous forme divergence, symétrique, uniformément elliptique, à coefficients L^∞. Un résultat analogue vaut aussi pour le problème quasi linéaire

$$-\Delta_p u=f(u)+h(x)\qquad \text{dans }\Omega,\qquad u=0\quad \text{sur }\partial\Omega,$$

où $-\Delta_p$, $1<p<\infty$, représente le p-laplacien. La condition de non-résonance (2) peut aussi être affaiblie, comme dans [9]. Il suffit par exemple que

$$\limsup_{s\to\pm\infty}\frac{2F(s)-\lambda_1 s^2}{|s|^q}<0$$

pour un q avec $1<q\leqq 2$.

(iv) La proposition 1 s'applique entre autres lorsque $F(s)=\lambda_1 s^2/2\sin s$. Les méthodes de [11] ne permettent pas de traiter cet exemple de non-linéarité oscillante (car $f(s)$ n'est pas à croissance linéaire, *cf.* exemple 4.7 de [11]).

Exemple. — Soient $h\in L^\infty(\Omega)$, $a<0<b$ et $f\in C[a, b]$ avec $f(a)\geqq\|h\|_\infty$ et $f(b)\leqq-\|h\|_\infty$. Soit $v\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ avec $\inf v>a$ et $\sup v=c>b$. On étend f continûment sur $[b, c]$ par une fonction affine sur $[b, (b+c)/2]$ et par une constante K sur $[(b+c)/2, c]$. On étend ensuite f continûment en dehors de $[a, c]$ de façon à satisfaire (2) et (5). Enfin la constante K est choisie suffisamment grande pour que

$$\Phi(v)<-\|F\|_{L^\infty(a,b)}|\Omega|-\|h\|_{L^\infty(\Omega)}(b-a)|\Omega|.$$

La démonstration de la proposition 1 fournit alors une solution u de (1) qui vérifie $a\leqq u(x)\leqq b$ p. p. dans Ω. Par conséquent

$$\Phi(u)\geqq-\|F\|_{L^\infty(a,b)}|\Omega|-\|h\|_{L^\infty(\Omega)}(b-a)|\Omega|,$$

ce qui montre que Φ n'est pas minimum en u.

Nous remercions Aomar Anane pour diverses discussions liées à cette étude.

Note remise le 12 décembre 1988, acceptée le 19 décembre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. DE FIGUEIREDO, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and détours*, I.C.T.P., Trieste, 1988.

[2] F. E. BROWDER, *Proc. Symp. Pure Math.*, Amer. Math. Soc., 23, 1973, p. 269-286.

[3] H. BREZIS et L. NIRENBERG, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 5, 1978, p. 225-326.

[4] D. DE FIGUEIREDO et J.-P. GOSSEZ, *J. Diff. Equat.*, 30, 1978, p. 1-19.

[5] J. WEBB, *J. Lond. Math. Soc.*, 21, 1980, p. 123-132.

[6] H. BREZIS et F. E. BROWDER, *J. Math. Pures Appl.*, 61, 1982, p. 245-253.

[7] R. HEMPEL, *J. für Math.*, 333, 1982, p. 179-190.

[8] A. BENKIRANE et J.-P. GOSSEZ, An approximation theorem in higher-order Orlicz-Sobolev spaces and applications, *Studia Math.* (à paraître).

[9] A. ANANE et J.-P. GOSSEZ, *Strongly nonlinear elliptic problems near resonance: a variational approach* (à paraître).

[10] H. BREZIS et F. E. BROWDER, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 287, série A, 1978, p. 113-115.

[11] D. DE FIGUEIREDO et J.-P. GOSSEZ, Nonresonance below the first eigenvalue for a semilinear elliptic problem, *Math. Ann.*, 281, 1988, p. 589-610.

D. de F. : *I.M.E.C.C., UNICAMP*, 13081 *Campinas, S. P., Brasil;*

J.-P. G. : *Département de Mathématique, Campus Plaine*, C.P. 214, *Université libre de Bruxelles*, 1050 *Bruxelles, Belgique*.