



INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION
INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
I.C.T.P., P.O. BOX 586, 34100 TRIESTE, ITALY. CABLE: CENTRATOM TRIESTE



SMR/402 - 28

COLLEGE ON SOIL PHYSICS
9 - 27 October 1989

"Régimes Permanents Bidimensionels D'Infiltration
dans un Sol Cultivé et Microirrigué. I. Théorie"

et

"Régimes Permanents Bidimensionels D'Infiltration
dans un Sol Cultivé et Microirrigué. II. Comparaison de la
Théorie avec des Mesures In-Situ"

M. VAUCLIN
Institut de Mécanique de Grenoble
C.N.R.S.
Saint Martin d'Hères
France

*Please note: These are preliminary notes intended for internal
distribution only.*

[5]

RÉGIMES PERMANENTS BIDIMENSIONNELS D'INFILTRATION DANS UN SOL CULTIVÉ ET MICROIRRIGUÉ, I. THÉORIE

J.F. BOULIER et M. VAUCLIN

*Institut de Mécanique de Grenoble, LA CNRS 6, B.P. 68, F-38402 Saint Martin d'Hères Cédex
(France)*

(Reçu le 10 juillet, 1986; accepté après révision le 25 février, 1987)

ABSTRACT

Boulier, J.F. et Vauclin, M., 1987. Régimes permanents bidimensionnels d'infiltration dans un sol cultivé et microirrigué, I. Théorie. (Soil water regime described by a bidimensional steady-state flow in a cultivated and irrigated soil, I. Theory). *J. Hydrol.*, 94: 355-370.

Soil water regime under a crop irrigated by equally spaced line-sources is described by a bidimensional steady-state flow. Mathematical solutions of the linearized equation resulting from an exponential relationship between unsaturated hydraulic conductivity and soil-water pressure, are obtained by means of Fourier's analysis in case of linear boundary conditions and when root extraction is a known function of space coordinates. In particular, we calculate the flow when a saturated strip at the soil surface is spreading from the line source. Solutions and their convergence are illustrated and discussed on an example demonstrating that mathematical solutions are physically meaningful only under restricted conditions.

RÉSUMÉ

Le régime hydrique d'une culture microirriguée par des lignes de goutteurs équidistantes est modélisé par un écoulement bidimensionnel permanent. Les solutions mathématiques de l'équation linéaire lorsque la conductivité non saturée du sol dépend exponentiellement de la pression capillaire sont obtenues au moyen d'une analyse harmonique dans les cas où les conditions aux limites de la maille irriguée sont aussi linéaires et lorsque l'extraction racinaire est une fonction connue des coordonnées d'espace. Nous développons tout spécialement le cas où une bande humide s'étend de part et d'autre de la ligne source. Les solutions et leur convergence sont illustrées et discutées sur un exemple montrant qu'une condition de compatibilité physique amène à rejeter certaines solutions mathématiques.

INTRODUCTION

L'intérêt technique et économique de la microirrigation est bien reconnu (Bresler, 1980) et ce mode d'irrigation a déjà fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques et agronomiques. Les fréquences d'arrosage utilisées sont élevées et tendent à créer un régime d'écoulement quasi-permanent lorsque la dose égale la consommation de la culture. La périodicité des réseaux de goutteurs sur une parcelle se traduit lorsque le sol est localement homogène par la

périodicité de l'écoulement qui est bidimensionnel dans un plan perpendiculaire aux rampes quand les goutteurs sont suffisamment rapprochés, comme ce sera le cas dans la suite.

L'équation de Richards linéarisée représentant le régime permanent lorsque la conductivité non saturée est une fonction exponentielle de la pression (Philip, 1969) peut être résolue analytiquement soit par superposition de solutions correspondant à des goutteurs isolés pour certaines conditions aux limites (Raats, 1971; Philip, 1971; Warrick et Lomen, 1977) soit en effectuant une analyse de type spectrale (Zachmann et Thomas, 1973). Cette dernière approche a été développée plus récemment par Batu pour une répartition périodique du flux supposée connue à la surface en milieu semi infini (1978), en présence d'une nappe à profondeur finie (1980) et généralisée au cas d'une répartition quelconque du flux à la surface (1983).

Toutefois Philip (1984a) remarque que les auteurs omettent généralement de vérifier que les solutions mathématiques des problèmes qu'ils résolvent ont bien une signification physique et considère de ce point de vue un des cas traités par Batu (1978). Philip (1984b) insiste également sur la nécessité d'une description physiquement correcte de la zone d'apport d'eau qui ne peut être ponctuelle (car la solution mathématique est alors singulière en ce point et ne correspond donc pas à la réalité) et traite le cas d'une cavité cylindrique à l'instar de Wooding (1968) dans le cas d'un disque saturé et de Batu (1977) pour une bande saturée.

Bien qu'à l'évidence le régime permanent d'infiltration soit conditionné par la présence de la plante qui puise tout ou partie de l'eau apportée, peu d'auteurs ont inclus un terme d'extraction racinaire dans leurs modèles macroscopiques. Certes la méconnaissance du comportement des racines (Molz, 1982) incite à une certaine prudence dans le choix du modèle mathématique représentant l'extraction de l'eau. Néanmoins la non prise en compte de ce terme conduit à notre avis à des solutions dont l'applicabilité aux situations de terrain peut paraître douteuse.

En ce qui concerne notamment le dimensionnement des réseaux d'irrigation à la parcelle Warrick et al. (1980) proposent une méthode fondée sur le régime permanent bidimensionnel plan induit par des sources ponctuelles avec une extraction racinaire. Quant à Bresler (1978), il fonde sa méthode sur la représentation plus réaliste de Wooding (1968) en ce qui concerne la zone d'apport mais ne prend pas en compte l'extraction racinaire. Ces deux approches reposent sur des concepts physiques, c'est là leur intérêt, mais n'y a-t-il pas lieu de modifier certaines de leurs hypothèses les moins réalistes?

Le but de cet article est réexaminer au moyen de la méthode proposée par Zachmann et Thomas (1973) les solutions du régime permanent bidimensionnel plan d'infiltration correspondant à une microirrigation en considérant divers types de conditions à la limite et notamment à la surface, où se forme une bande saturée de part et d'autre des lignes de goutteurs et en introduisant des modèles d'extraction racinaire de répartition connue dans le sol.

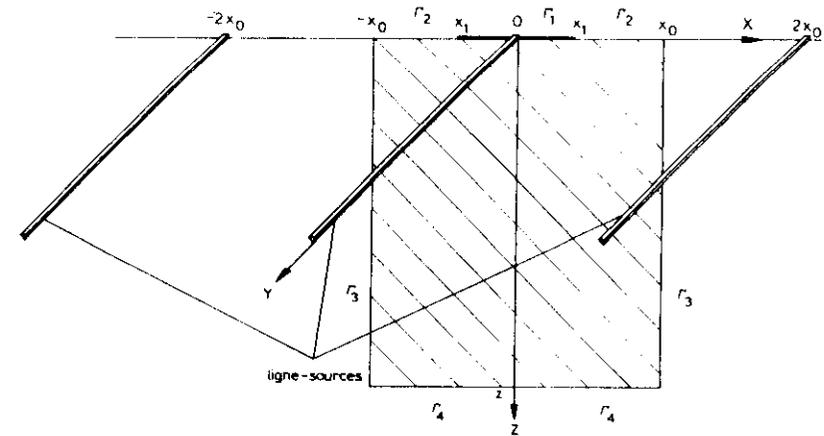


Fig. 1. Géométrie de la maille irriguée (zone hachurée) dans le plan XOZ perpendiculaire aux lignes des sources OY.

Fig. 1. Flow geometry (hatched area) in the XOZ plane perpendicular to the line sources OY.

Les solutions théoriques développées ici seront comparées dans la 2ème partie de cet article à des résultats expérimentaux obtenus sur une parcelle microirriguée et utilisées en particulier pour analyser l'influence de la variabilité du sol sur le régime d'écoulement.

POSITION DU PROBLEME

Le réseau d'irrigation (Fig. 1) est constitué de sources linéaires parallèles à OY régulièrement espacées de $2x_0$ (m). Le sol est supposé homogène sur une profondeur z_0 (m), sa conductivité non saturée K ($m\ s^{-1}$) s'exprimant en fonction de la pression effective h (m) par:

$$\begin{cases} K(h) = K_0 \exp \alpha (h - h_e), & h < h_e \\ K(h) = K_0, & h_e < h \end{cases} \quad (1)$$

où K_0 est la conductivité saturée, α est l'atténuation capillaire (m^{-1}) et h_e est la pression d'entrée d'air. Dans la suite du texte on notera (Fig. 1):

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, z): |x| < x_0, \quad 0 < z < z_0\} \\ \Gamma_1 &= \{(x, z): |x| \leq x_1, \quad z = 0\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, z): x_1 < |x| \leq x_0, \quad z = 0\} \\ \Gamma_3 &= \{(x, z): |x| = x_0, \quad 0 < z < z_0\} \\ \Gamma_4 &= \{(x, z): |x| \leq x_0, \quad z = z_0\} \end{aligned}$$

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ constitue la frontière supérieure, Γ_3 et Γ_4 sont les frontières latérale et inférieure respectivement. Ω est ouvert sur R^2 sur lequel le régime permanent d'écoulement non saturé satisfait l'équation de Richards:

$$\text{div} \{K(h) \text{grad}(h - z)\} - R = 0, \quad (x, z) \in \Omega \quad (2)$$

où $R = R(x, z)$ est le taux d'extraction racinaire (s^{-1}) supposé connu en tout point de cette maille, périodique de période $2x_0$ horizontalement et symétrique par rapport à l'axe vertical passant par la source linéaire (axe de la maille). L'écoulement résultant est alors périodique horizontalement de période $2x_0$ et admet une symétrie par rapport à cet axe.

La consommation racinaire par unité de surface du sol CR ($m s^{-1}$) est définie par:

$$CR = \frac{1}{2x_0} \int_0^{x_0} R dx dz \quad (m s^{-1}) \quad (3)$$

La transformation de Kirchhoff U ($m^2 s^{-1}$):

$$U(h) = \int_h^h K(h) dh = K(h)/\alpha \quad (4)$$

permet de linéariser (Philip, 1969) l'éqn. (2) qui devient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial U}{\partial z} - R = 0, \quad (x, z) \in \Omega \quad (5)$$

Nous allons maintenant spécifier les conditions aux limites CL de la maille irriguée.

(1) Frontière inférieure CLI. Si le drainage q_d ($m s^{-1}$) est imposé la CLI s'exprime par:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} + \alpha U = q_d, \quad (x, z) \in \Gamma_4 \quad (6a)$$

Un substratum imperméable correspond à $q_d = 0$. Si une nappe est située à z_0 , la CLI devient:

$$U = U_0 = K_0/\alpha, \quad (x, z) \in \Gamma_4 \quad (6b)$$

(2) frontière latérale. Compte tenu de la symétrie du problème, Γ_3 est une frontière imperméable et par conséquent:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma_3 \quad (7)$$

(3) frontière supérieure CLS. Sur Γ_1 qui est la bande d'alimentation, le sol est saturé. La CLS s'exprime par:

$$U = U_0, \quad (x, z) \in \Gamma_1 \quad (8)$$

La frontière Γ_2 est soumise à un flux d'évaporation q_e . Deux modèles simplifiés peuvent être retenus:

(1) $-q_e$, indépendant de l'humidité du sol la CLS est:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} + \alpha U = -q_{em}, \quad (x, z) \in \Gamma_2 \quad (9a)$$

(2) $-q_e$, dépendant linéairement du potentiel de Kirchhoff, la CLS devient:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} + \alpha U = -q_{em} \frac{U}{U_0}, \quad (x, z) \in \Gamma_2 \quad (9b)$$

de telle sorte que si le sol est saturé, le flux d'évaporation ne dépende que du climat. L'expression (9b) est plus réaliste que (9a) dans la mesure où le flux d'évaporation dépend effectivement de l'humidité du sol à la surface et décroît à mesure que celle-ci se dessèche.

En conclusion, les conditions aux limites s'expriment mathématiquement par des formes linéaires de U et de ses dérivées normales $\partial U/\partial v$ sur le bord de Ω :

$$\xi U + \zeta \frac{\partial U}{\partial v} = g, \quad (x, z) \in \Gamma \quad (10)$$

où g est une fonction et ξ, ζ sont deux constantes non simultanément nulles, déterminées sur chacune des parties de la frontière. On conviendra dans la suite que:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (x, z) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4$$

et:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (x, z) \in \Gamma_3$$

On notera que le problème linéaire P constitué des éqns. (5) et (10) est de type "mixte". Il admet une solution unique (Boulier, 1985). De plus, pour représenter effectivement un écoulement non saturé, cette solution doit vérifier la contrainte (Philip, 1984a) suivante:

$$0 < U < U_0 \quad (11)$$

Le changement de fonction inconnue (Wooding, 1968; Raats, 1971; Zachmann et Thomas, 1973):

$$V = U \exp(-\beta z), \quad \text{avec } \beta = \alpha/2 \quad (12)$$

transforme le problème P en un problème elliptique linéaire équivalent P':

$$\text{lap } V + \beta^2 V + R' = 0, \quad (x, z) \in \Omega \quad (13)$$

$$\xi' V + \zeta' \frac{\partial V}{\partial v} = g', \quad (x, z) \in \Gamma \quad (14)$$

TABEAU 1

Valeurs des coefficients décrivant les conditions aux limites (éqn. 14)

Equations décrivant les conditions aux limites	ξ'	ζ'	g'
Γ_1 (éqn. 6a)	β	1	$q_0 \exp(-\beta z_0)$
Γ_1 (éqn. 6b)	β	0	$U_0 \exp(-\beta z_0)$
Γ_3 (éqn. 7)	0	1	0
Γ_1 (éqn. 8)	β	0	βU_0
Γ_2 (éqn. 9a)	β	1	$-q_{em}$
Γ_2 (éqn. 9b)	$\beta + q_{em}/U_0$	1	0

avec $R' = R \exp(-\beta z)$, ξ', ζ' et g' déduits des éqns. (10) et (12). Les expressions correspondant aux différentes conditions aux limites sont données dans le Tableau 1.

Dans la suite du texte on notera ξ'_i, ζ'_i et g'_i les valeurs de ξ, ζ et g' respectivement, prises sur la portion Γ_i de la frontière Γ .

CAS PARTICULIERS

Avant de présenter la solution de P' plusieurs cas particuliers sont envisagés.

Régime permanent sans extraction racinaire ni alimentation hydrique à la surface (Γ_1 vide)

On peut montrer (Zachmann et Thomas, 1973) que les fonctions φ_n et φ'_n définies pour tout entier n positif ou nul par:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(x, z) &= e^{i n x} \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right) \\ \varphi'_n(x, z) &= e^{-i n x} \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right) \end{aligned} \right\} (15)$$

avec:

$$T_x = \frac{x_0}{\Pi} \text{ (m)}$$

et:

$$\lambda_n = \left[\beta^2 + \left(\frac{n}{T_x}\right)^2 \right]^{1/2} \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

sont solutions de l'éqn. (13) avec $R' = 0$. Elles correspondent aux fonctions propres de l'opérateur elliptique $(-\Delta + \beta^2)$.

La solution de P' étant supposée suffisamment régulière pour que V et $\partial V/\partial v$ admettent des développements en série de Fourier convergents en moyenne

TABEAU 2

Expressions de Δ_n (éqn. 20) pour différentes conditions aux limites inférieures CLI et supérieures CLS, $\gamma = q_{em}/K_0$

	CLI	Éqn. (6a)	Éqn. (6b)
CLS			
Éqn. (9a)		$\text{sh}(\lambda_n z_0)(\lambda_n^2 - \beta^2)$	$\beta[\beta \text{sh}(\lambda_n z_0) + \lambda_n \text{ch}(\lambda_n z_0)]$
Éqn. (9b)		$\text{sh}(\lambda_n z_0)[\beta(\beta + \gamma) - \lambda_n^2] - \lambda_n \gamma \text{ch}(\lambda_n z_0)$	$\beta[\beta + \gamma] \text{sh} \gamma_n z_0 + \lambda_n \text{ch}(\lambda_n z_0)$

quadratique, les fonctions g'_i prennent sur les frontières Γ_2 et Γ_4 la forme suivante:

$$g'_i = \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,n} \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right) \quad (16)$$

Tous les termes impairs du développement sont nuls, en raison de la symétrie par rapport à l'axe de la maille ($x = 0$). Considérons la fonction ϕ définie par la série:

$$\phi = \sum_{n>0} (w_n \varphi_n + w'_n \varphi'_n) \quad (17)$$

avec w_n et w'_n solution du système linéaire obtenu en égalant sur les frontières et les décompositions en série de Fourier de $\xi'_i \phi + \zeta'_i \partial \phi / \partial v$ d'une part et de g'_i d'autre part. Soit, pour tout entier:

$$(\xi'_2 - \zeta'_2 \lambda_n) w_n + (\xi'_4 + \zeta'_4 \lambda_n) w'_n = g'_{2,n} \quad (18)$$

$$(\xi'_4 e^{i n z_0} - \lambda_n \zeta'_4 e^{i n z_0}) w_n + (\xi'_2 e^{i n z_0} + \lambda_n \zeta'_2 e^{i n z_0}) w'_n = g'_{4,n} \quad (19)$$

système dont le déterminant est:

$$\Delta_n = (\xi'_2 - \zeta'_2 \lambda_n)(\xi'_4 + \zeta'_4 \lambda_n) e^{i n z_0} - (\xi'_4 - \zeta'_4 \lambda_n)(\xi'_2 + \zeta'_2 \lambda_n) e^{-i n z_0} \quad (20)$$

Le Tableau 2 donne les expressions de $-\Delta_n/2$ dans les différents cas envisagés.

On peut montrer (Boulier, 1985) que Δ_n n'est jamais nul à l'exception du cas où les flux sont imposés sur les frontières supérieures et inférieures, CL (6a) et (9a), et pour $n = 0$. Le problème, de Neuman dans ce cas particulier, n'a de solution que si la somme des flux au travers de Γ_2 et Γ_4 est nulle (c'est à dire $g_{4,0} = g_{2,0}$ et la solution n'est définie qu'à un terme $w_0 \exp(xz)$ près dont la contribution au flux de Darcy est nulle (position arbitraire d'une nappe).

Dans les autres cas, la solution du système (18), (19) est:

$$\left. \begin{aligned} w_n &= \frac{1}{\Delta_n} [g_{2,n} e^{i n z_0} (\xi'_4 + \zeta'_4 \lambda_n) - g_{4,n} (\xi'_2 + \zeta'_2 \lambda_n)] \\ w'_n &= \frac{1}{\Delta_n} [g_{4,n} (\xi'_2 - \zeta'_2 \lambda_n) - g_{2,n} e^{i n z_0} (\xi'_4 - \zeta'_4 \lambda_n)] \end{aligned} \right\} (21)$$

Si l'on suppose que les CL sont suffisamment régulières pour que les fonctions g' soient majorées en valeur absolue par W' alors leurs coefficients de

Fourier sont bornés et il est immédiat que les suites (w_n) et (w'_n) sont majorées au delà d'un certain rang par $W' \exp(-\lambda_n z_0)$ et W' respectivement. Les séries de fonction $\Sigma w_n \varphi_n$ et $\Sigma w'_n \varphi'_n$ sont donc majorées par la série $\Sigma \exp[-\lambda_n(z_0 - z)]$ qui converge pour tout z dans l'intervalle $[0, z]$ ϕ est donc convergente sur Ω .

De la même façon les séries des dérivées partielles de $w_n \varphi_n$ et de $w'_n \varphi'_n$ sont majorées par des séries du type $Q(\lambda_n) \exp[-\lambda_n(z_0 - z)]$ avec Q un polynôme. Il est donc clair qu'elles convergent normalement sur tout intervalle fermé contenu dans Ω . Par conséquent, ϕ admet des dérivées partielles de tous ordres et l'on a pour tout couple d'entiers p, q :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial z^q} \phi = \sum_{n \geq 0} \left(w_n \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial z^q} \varphi_n + w'_n \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial z^q} \varphi'_n \right) \quad (22)$$

Nous en déduisons notamment que:

$$-\Delta \phi + \beta^2 \phi = \sum_{n \geq 0} w_n (-\Delta \varphi_n + \beta^2 \varphi_n) + w'_n (-\Delta \varphi'_n + \beta^2 \varphi'_n) = 0$$

Comme ϕ vérifie par construction les conditions aux limites et que la solution de P' est unique (à l'exception du cas où les CL sont représentées par les éqns. (6a) et (9a) qui a déjà été discuté), ϕ est donc solution de P' .

Régime permanent sans extraction racinaire, avec alimentation hydrique à la surface (Γ_1 non vide)

La résolution du problème P' lorsque Γ_1 et Γ_2 ne sont pas vides, est analogue à la précédente: la solution étant définie par l'éqn. (17) les composantes w_n et w'_n pour chaque entier positif n , sont déterminées de façon à satisfaire les conditions aux limites. Ainsi, la CLI s'exprime encore par une équation linéaire en w_n et w'_n (éqn. 19). En revanche, la CLS ne s'exprime plus par une équation simple. Elle devient:

$$\chi \left(\xi_1 V + \zeta_1 \frac{\partial V}{\partial v} \right) + (1 - \chi) \left(\xi_2 V + \zeta_2 \frac{\partial V}{\partial v} \right) = \chi g'_1 + (1 - \chi) g'_2 \quad (23)$$

où χ est l'indicatrice de Γ_1 ($\chi = 1$ sur Γ_1 et $\chi = 0$ sur Γ_2) dont le développement en série de Fourier peut s'écrire:

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cos(kx/T_x)$$

en posant $\chi_0 = x_1/x_0$ et $\chi_k = \sin(kx_1/T_x)/k\pi$

Si chacune des fonctions définies par les deux membres de l'éqn. (23) est égale en tout point à sa série de Fourier, cette équation est équivalente au système d'équations S obtenu en égalant deux à deux les composantes de ces développements. Or si ψ définie sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ vérifie:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right)$$

un calcul très classique montre que:

$$\psi \chi = \sum_{n \geq 0} \psi'_n \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right)$$

avec:

$$\psi'_0 = \sum_{p \geq 0} \psi_p \chi_p$$

et:

$$\psi'_n = \sum_{p \geq 0} \psi_p (\chi_{n+p} + \chi_{n-p}), \quad \text{pour } n \geq 1$$

Puisque les éqns. (15) et (17) permettent d'obtenir les développements en série de Fourier de V et $\partial V/\partial v$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, le système S s'exprime finalement par:

$$b_n = \sum_{p \geq 0} (s_{n,p} w_p + s'_{n,p} w'_p), \quad \forall n \in [1, N] \quad (24)$$

avec:

$$s_{n,p} = (\chi_{n,p} + \chi_{n-p})[(\xi_1 - \xi_2) - \lambda_n(\zeta_1 - \zeta_2)] + \delta_n^p(\xi_2 - \lambda_p \zeta_2)$$

$$s'_{n,p} = (\chi_{n,p} + \chi_{n-p})[(\xi_1 - \xi_2) + \lambda_n(\zeta_1 - \zeta_2)] + \delta_n^p(\xi_2 + \lambda_p \zeta_2)$$

et:

$$b_n = \sum_{p \geq 0} [(\chi_{n,p} + \chi_{n-p})(g_{1,n} - g_{2,n}) + \delta_n^p g_{2,n}] \quad (25)$$

où δ_n^p est le symbole de Kronecker ($\delta_n^p = 0$ si $n \neq p$, $\delta_n^n = 1$). Pour plus de détails, on se reportera à Boulier (1985). Le système S défini par l'éqn. (24) est linéaire en w_n et w'_n et comporte une infinité d'équations faisant intervenir toutes les composantes, à la différence du système défini par l'éqn. (18) dont la n -ième éqn. ne lie que w_n et w'_n .

Si ϕ vérifie les éqns. (19) et (24) et si la série formelle est suffisamment régulière pour que l'on puisse la dériver terme à terme alors ϕ est la solution de P' . Elle ne pourra être calculée numériquement qu'en approximant S par son sous-système S_N obtenu en ne conservant que les N premières équations et les N premières inconnues. Il y aura lieu, dans ce cas, d'étudier les convergences de la procédure en prenant des valeurs croissantes de N (Wooding, 1968). Cela sera illustré plus loin sur un exemple.

SOLUTION DU REGIME PERMANENT AVEC EXTRACTION RACINAIRE

Zachmann et Thomas (1973) fournissent le noyau de Green de l'opérateur $(-\Delta + \beta^2)$ dans Ω . Il permet théoriquement de calculer (ce que ne font pas ces auteurs) une solution particulière de l'éqn. (13) pour $R'(x, z)$ quelconque. Cette méthode peut s'avérer très utile lorsque le taux d'extraction est connu numériquement point par point. Toutefois elle n'est pas utilisée ici car sous certaines hypothèses, il est possible d'exhiber des solutions analytiques. L'étude se limite ici, aux cas où:

(1) R' est égal en tout point de Ω à sa série double de Fourier:

$$R' = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ m \geq 0}} \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right) \left[r_{1,n,m} \cos\left(m \frac{z}{T_z}\right) + r_{2,n,m} \sin\left(m \frac{z}{T_z}\right) \right] \quad (26)$$

où:

$$T_x = \frac{z_0}{2\pi} \text{ (m)}$$

On notera qu'en raison de la symétrie du problème, il n'apparaît pas de termes en $\sin(nx/T_x)$.

(2) R' est combinaison linéaire d'exponentielles:

$$R' = e^{\beta z} \sum_{1 \leq l \leq L} \left[\sum_{n \geq 0} r_{l,n} \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right) \right] e^{-\eta_l z} \quad (27)$$

où η_l est dénommée dans la suite atténuation racinaire.

L'équation (27) est une généralisation des puits racinaires $R \exp(-\eta z)$ étudiés par Warrick et al. (1979). Certes, l'éqn. (26) est très générale, mais dans la pratique, la densité des racines décroît très vite avec la profondeur z , ce qui rend l'éqn. (27) particulièrement adéquate pour représenter l'extraction racinaire, pour autant que celle-ci soit proportionnelle à celle-là. D'ailleurs, mathématiquement l'éqn. (27) reste assez générale, à la transformation $Z = \exp(-z)$ près, R' est combinaison linéaire de $\cos(nx/T_x)Z(\eta_l + \beta)$. Or, les ensembles de fonctions $[\cos(nx/T_x), n \in \mathbb{N}]$ et $[Z^p, p \in \mathbb{N}]$ sont denses dans de nombreux espaces fonctionnels. Toute extraction racinaire R' peut donc être approximée avec une précision arbitraire par une fonction du type (27).

Considérons les solutions particulières de l'éqn. (13) définies par:

$$\phi_0 = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ m \geq 0}} \frac{-1}{\beta^2 + \left(\frac{n}{T_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{T_z}\right)^2} \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right) \left(r_{1,n,m} \cos\left(m \frac{z}{T_z}\right) + r_{2,n,m} \sin\left(m \frac{z}{T_z}\right) \right) \quad (28)$$

lorsque R' vérifie (26) et par:

$$\phi_0 = \sum_{\substack{1 \leq l \leq L \\ n \geq 0}} \left[\sum_{m \geq 0} \frac{r_{l,n}}{(\eta_l + \beta)^2 - \left(\frac{n}{T_x}\right)^2 - \beta^2} \cos\left(n \frac{x}{T_x}\right) \right] e^{-(\eta_l + \beta)z} \quad (29)$$

lorsque R' vérifie l'éqn. (27). La convergence des séries (28) et (29) et de leur dérivées partielles résulte directement de celles définies par (26) et (27).

Soit alors la solution ϕ_1 du problème défini par l'éqn. (13) avec $R' = 0$ et la condition à la limite suivante:

$$\xi' V + \zeta' \frac{\partial V}{\partial v} = g' - \left(\xi' \phi_0 + \zeta' \frac{\partial \phi_0}{\partial v} \right) \quad (30)$$

Il est clair que $\phi = \phi_0 + \phi_1$ est solution du problème P'. Or celle-ci est unique dès que Γ_1 n'est pas vide. Donc $U = (\phi_0 + \phi_1) \exp(\beta z)$ est solution de P lorsque Γ_1 n'est pas vide, c'est à dire lorsqu'il y a effectivement un apport irrigué.

Récapitulons la démarche pour obtenir la solution U du régime permanent lorsqu'il y a irrigation (problème P avec Γ_1 non vide): (a) effectuer le changement de fonction inconnue [éqn. (12)]; (b) calculer une solution particulière au moyen des éqns. (28) ou (29) selon que l'extraction racinaire transformée R' est définie par les éqns. (26) ou (27) respectivement; (c) calculer la solution de l'éqn. (13) avec $R' = 0$ et la CLS définie par l'éqn. (30), ϕ_1 définie par l'éqn. (17) est tronquée à ses N premiers termes, pour lesquels les composantes w_n et w'_n sont calculées en résolvant le système linéaire S_N (eqn. 25); et (d) additionner ϕ_0 et ϕ_1 et effectuer la transformation inverse de l'éqn. (12) pour obtenir U .

Notons pour terminer qu'à un x_1 donné, la procédure précédente permet de calculer, une fois déterminée la solution de P, la répartition du flux sur la bande saturée (Γ_1) et d'en déduire par intégration le débit des sources rapporté à la surface de la maille irriguée:

$$D_c = \frac{1}{2x_0} \int_{x_1}^{x_1} \left(-\frac{\partial v}{\partial z} + \beta v \right) dx \quad (31)$$

En pratique c'est D_c qui est connu (dose d'irrigation) et x_1 n'est pas connu. Il y a donc lieu d'essayer différentes valeurs de x_1 pour obtenir le débit D_c imposé.

EXEMPLE D'APPLICATION

Afin d'étudier la convergence de la procédure proposée et d'examiner les conséquences de la condition de compatibilité physique (éqn. 11) le régime permanent d'infiltration est calculé dans les conditions suivantes: (a) sol "Chino clay" (Gardner, 1959) $K_0 = 2,289 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$, $\alpha = 2,05 \text{ m}^{-1}$; (b) $x_0 = 0,75 \text{ m}$ et conditions aux limites (6a) avec fond imperméable, $q_n = 0$ et (9b); et (c) extraction racinaire définie par l'éqn. (27), supposée indépendante de x , avec $L = 1$ et $\eta_1 = 1,97 \text{ m}$.

La solution du problème P dépend alors des trois paramètres adimensionnels suivants:

$$Z_0 = \alpha z_0, \quad \Lambda_c = q_{em}/K_0, \quad \text{et} \quad \Lambda_c = CR/K_0$$

où CR défini par l'éqn. (3) peut être calculé à partir de (27):

$$CR = [1 - \exp(-\eta z_0)] R_0 / \eta_1$$

A titre d'exemple la Fig. 2 présente pour $Z_0 = 3,08$ ($z_0 = 1,5 \text{ m}$) et différentes valeurs de Λ_c et Λ_c l'évolution des valeurs adimensionnalisées w_{0i}/K_0 d'une part et w'_i/K_0 ($i = 1, 2, 3, 4$) d'autre part en fonction du nombre N de termes retenus dans la série définie par l'éqn. (17). $N = 100$ est la limite pratique d'encombrement mémoire de l'ordinateur utilisé (Norsk Data N 10). Il apparaît que la convergence est d'autant plus rapide que Λ_c est grand. Notons sur la Fig. 2c que

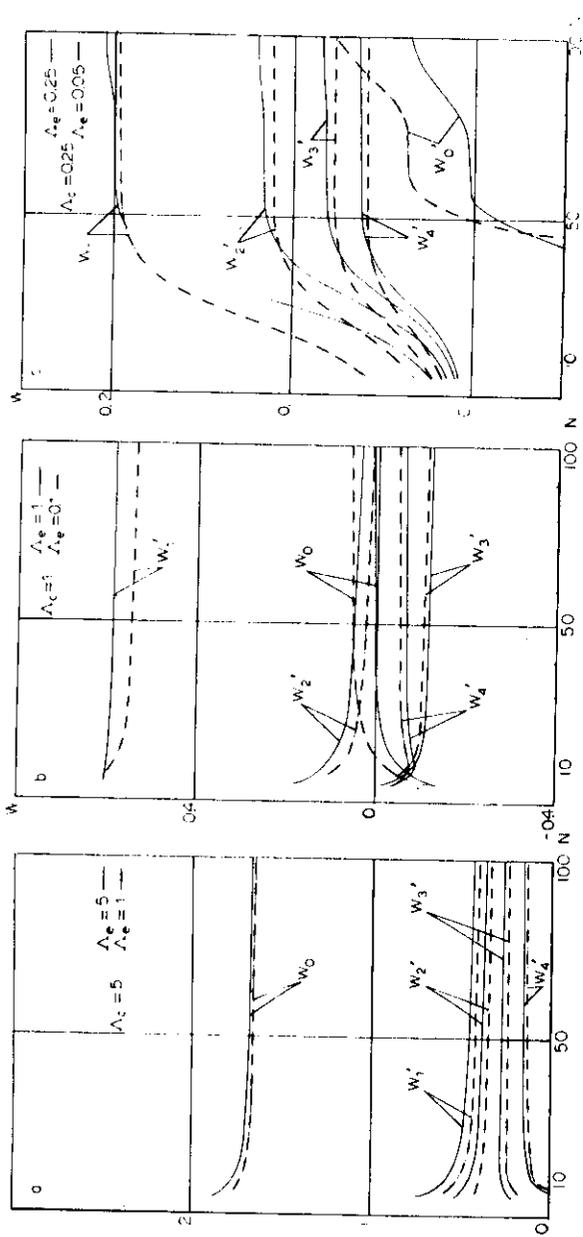


Fig. 2. Convergence des cinq premières composantes adimensionnelles de la solution en série (éqn. 17) pour le sol "Chino-clay" et pour différentes valeurs des paramètres Λ_c et Λ_e . N est le nombre de termes retenus.

Fig. 2. Convergence of the five first adimensional components of the serie (eqn. 17) for the "Chino-clay" soil, and different values of the parameters Λ_c and Λ_e . N is the number of terms used in the calculation.

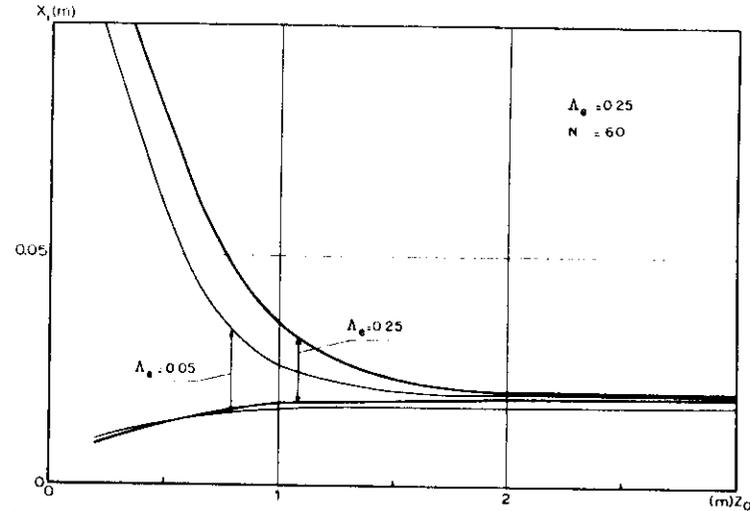


Fig. 3. Relations entre la profondeur de la couche imperméable (z_0) et la demi largeur de la bande saturée (x_1).

Fig. 3. Relations between the depth of the impervious between (z_0) and the half width of the saturated zone at the surface (x_1).

les valeurs de N supérieures à 75 donnent lieu à un effet parasite qui peut être dû au cumul des erreurs arrondies. Une étude systématique montre que pour les valeurs de X_0 et Z_0 envisagées ici $\Lambda_c = 0.1$ est le seuil inférieur d'utilisation de cette procédure. L'influence de Λ_c ne semble pas déterminante. Par ailleurs le choix $N = 60$ semble acceptable pour toute la gamme $\Lambda_c > 0.1$.

Sur la Fig. 3 sont représentées en fonction de z_0 les valeurs extrêmes de x_1 conduisant à des solutions physiquement admissibles. Il faut d'ailleurs noter que si ces résultats sont modifiés lorsque η varie, les valeurs du débit (dépendant certes de CR et de x_1) sont indépendantes de η . Ce résultat un peu surprenant s'explique par le fait qu'il existe une solution particulière de l'éqn. (13) du type suivant:

$$V_0 = \frac{R_0}{\eta(\eta + \alpha)} e^{(\eta + \beta)z} + v_0 e^{\beta z} + v'_0 e^{-\beta z}$$

de flux nul sur Γ_1 et nulle sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. La solution générale de P' ne dépend plus alors que des valeurs de $-\beta \partial V_0 / \partial z + \beta V_0$ sur Γ_2 . Or, si $z = 0$ le calcul montre que $\beta V_0 - \partial V_0 / \partial z, z = 0 = CR$, ne dépend pas de η . Cette situation particulière disparaît lorsque R dépend de x .

Les champs de pression h calculée à partir de U sont représentés en perspective sur la Fig. 4 pour laquelle le Tableau 3 résume les valeurs des paramètres Λ_c et Λ_e employés, la valeur de x_1 retenue dans l'intervalle de valeurs physiquement admissibles et la valeur correspondante du débit.

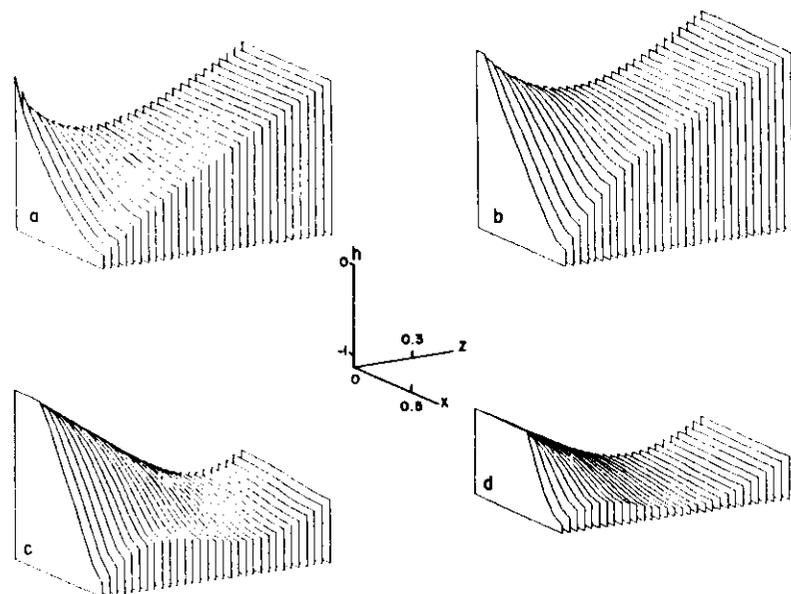


Fig. 4. Champs de pression dans la maille irriguée (voir Tableau 3).

Fig. 4. Mapping of the water pressure in the flow domain (see Table 3).

Pour ces exemples, la demi-largeur de bande x_1 croît quand le débit croît. Le flux moyen d'évaporation sur une maille est relativement faible par rapport au débit même lorsque Λ_s est supérieur à Λ_c (cas b). Pour ces dimensions de la maille, la pression au fond du profil ($z = z_0$) est pratiquement constante ($h = -0,02; -0,02; -1,15; -0,50$ m respectivement pour les cas a, b, c, d). Les bulbes obtenus sont plus allongés suivant la verticale que latéralement. Les pressions à la surface entre deux rampes ($x = x_0$) sont faibles et correspondent pour ces exemples aux valeurs minimales du champ de pression dans la maille ($h = -1,67; -1,92; -1,80$ et $-0,92$ m respectivement).

TABLEAU 3

Valeurs de la demi-largeur de la zone saturée à la surface et des débits des goutteurs calculées pour différentes valeurs de Λ_c et Λ_s

Figure	Λ_c	Λ_s	x_1 (m)	D_s/K_0	$10^7 D_c$ (m s ⁻¹)
a	0,25	-0,25	0,0022	0,285	0,659
b	0,5	-1	0,125	0,627	1,452
c	1	-0,05	0,275	1,007	2,330
d	1,5	-1	0,485	1,604	3,714

D'un point de agronomie l'intervalle utile de débit est compris pour ce sol ($K_0 = 20 \text{ mm j}^{-1}$) entre ceux des cas a et b. La largeur de la bande humide est donc comprise entre $4,5 \times 10^{-2}$ m et 25×10^{-2} m.

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

La solution mathématique de l'équation des régimes permanents d'infiltration bidimensionnels plan vient d'être obtenue pour un sol de conductivité variant exponentiellement avec la pression. La méthode proposée est fondée sur un développement spectral dû à Zachmann et Thomas (1973) qui est étendu ici au cas de conditions de type mixte à la surface pour rendre compte notamment de la zone saturée se développant de part et d'autre de la ligne-source en microirrigation. De plus, les solutions particulières correspondant à des extractions racinaires ne dépendant que des coordonnées d'espace ont été développées afin de représenter plus réalistement le régime d'écoulement dans un sol cultivé et microirrigué. L'exemple que nous venons de traiter illustre bien que l'équation linéaire vérifiée par le potentiel de Kirchhoff admet des solutions mathématiques qui ne sont physiquement valables que pour certaines gammes des paramètres dont elle dépend. Ainsi dans le cas d'un substratum imperméable à une profondeur z_0 donnée, la taille de la bande saturée et par conséquent le débit des sources sont compris entre deux valeurs limites.

D'un point de vue numérique, toutefois, le nombre de modes à prendre en compte dans la décomposition spectrale est relativement élevé et la convergence de la procédure ne paraît pas obéir à un critère simple. De même, l'étude de la compatibilité physique doit être menée dans chaque cas. Le développement de solutions comportant un moins grand nombre de modes, au prix d'une moins bonne restitution de la condition à la limite notamment, pourrait s'avérer utile en ce qui concerne les applications pratiques.

Cette procédure peut par ailleurs être envisagée dans d'autres situations conduisant à des problèmes linéaires (Boulier, 1985): (a) lorsque le sol est stratifié en couches horizontales de telle manière que l'atténuation capillaire α reste constante et que la conductivité varie d'une couche à l'autre; et (b) lorsque l'extraction racinaire dans le sol est une fonction affine de la conductivité non saturée. Signalons enfin les cas où le domaine des sources (Γ_s avec nos notations) tend vers un point les expressions obtenues ici tendent vers la solution de Zachmann et Thomas (1973).

L'application de ce modèle aux situations de terrain dépend de la plus ou moins bonne correspondance entre la réalité et les hypothèses qui la soutiennent. Le modèle exponentiel pour la conductivité non saturée a déjà été discuté de nombreuses fois (Philip, 1969; Bresler, 1978) et semble s'appliquer à une large classe de sols. En revanche, peu d'éléments permettent de juger la vraisemblance des extractions racinaires envisagées ici. Nous avons par ailleurs supposé que les caractéristiques hydrodynamiques étaient uniformes: si cette hypothèse paraît justifiée à l'échelle de la maille irriguée (surface de l'ordre du mètre carré) qu'en est-il de l'impact de la variabilité spatiale à l'échelle de la

parcelle sur l'écoulement microirrigué? C'est pour analyser ces différentes hypothèses et tenter de répondre à cette dernière question que nous comparons dans la deuxième partie de cet article l'approche qui vient d'être proposée avec des mesures effectuées sur une parcelle microirriguée.

REMERCIEMENTS

Le Professeur O. Palacios de l'Université Chapingo, Mexique, a très aimablement mis à la disposition des auteurs lors de son séjour sabbatique à l'IMG son code de calcul TOP3D pour la visualisation graphique des champs de pression.

REFERENCES

- Batu, V., 1977. Steady infiltration from a ditch: theory and experiment. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 41: 677-681.
- Batu, V., 1978. Steady infiltration from single and period strip sources. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 42: 544-549.
- Batu, V., 1980. Flow net for unsaturated infiltration from period strip sources. *Water Resour. Res.*, 16: 254-288.
- Batu, V., 1983. Flow net for two-dimensional linearized infiltration and evaporation from non uniform and non periodic strip-sources. *J. Hydrol.*, 64: 225-238.
- Boulier, J.F., 1985. Modélisation stochastique de l'infiltration en milieux poreux non uniformes. Application à une parcelle microirriguée. Thèse, USTMG, 249 pp.
- Bresler, E., 1978. Analysis of trickle irrigation with application to design problems. *Irrig. Sci.*, 1: 3-17.
- Bresler, E., 1980. Trickle drip irrigation: principles and application to soil-water management. *Adv. Agron.*, 29: 343-393.
- Gardner, W.R., 1959. Some steady state solutions of unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.*, 85: 228-232.
- Molz, F.J., 1982. Models of water transport in the soil-plant system: a review. *Water Resour. Res.*, 17: 1245-1260.
- Philip, J.R., 1969. Theory of infiltration. *Adv. Hydrosci.*, 5: 215-290.
- Philip, J.R., 1971. General theorem on steady infiltration from surface sources, with application to point and line sources. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 35: 867-871.
- Philip, J.R., 1984a. Non uniform leaching from non uniform steady infiltration. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 48: 740-749.
- Philip, J.R., 1984b. Steady infiltration from circular cylindrical cavities. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 48: 270-277.
- Raats, P.A.C., 1971. Some properties of flows in unsaturated soils with an exponential dependence of hydraulic conductivity upon the pressure head. *J. Hydrol.*, 14: 129-138.
- Warrick, A.W. et Lomen, D.O., 1977. Flow from a line source above a shallow water table. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 41: 849-852.
- Warrick, A.W., Amoozegar-Fard, A. et Lomen, D.O., 1979. Linearized moisture flow from line source with water extraction. *Trans. Asae*, 22: 549-553.
- Warrick, A.W., Lomen, D.O. et Amoozegar-Fard, A., 1980. Linearized moisture flow with root extraction for three dimensional steady conditions. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 44: 911-914.
- Wooding, R.A., 1968. Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Resour. Res.*, 4: 1259-1273.
- Zachmann, D.W. et Thomas, A.W., 1973. A mathematical investigation of steady infiltration from line-source. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 37: 495-500.

[5]

RÉGIMES PERMANENTS BIDIMENSIONNELS D'INFILTRATION DANS UN SOL CULTIVÉ ET MICROIRRIGUÉ, II. COMPARAISON DE LA THÉORIE AVEC DES MESURES IN-SITU

J.F. BOULIER et M. VAUCLIN

Institut de Mécanique de Grenoble, LA CNRS, B.P. 68, F-38402 Saint Martin d'Hères Cédex (France)

(Reçu le 10 juillet, 1986; accepté après révision le 25 février, 1987)

ABSTRACT

Boulier, J.F. et Vauclin, M., 1987. Régimes permanents bidimensionnels d'infiltration dans un sol cultivé et microirrigué, II. Comparaison de la théorie avec des mesures in-situ (Soil water regime described by a bidimensional steady-state flow in a cultivated and irrigated soil, II. Comparison between theory and field measurements). *J. Hydrol.*, 94: 371-394.

An experimental plot of 2500 m² in area has been cultivated and irrigated by line sources (trickle irrigation), in order to compare the theory presented in the first part of the paper with measurements during two years (sorghum, maize). In addition a stochastic conceptual model taking into account the spatial variability of the soil hydraulic characteristics described by means of a scaling factor (according to porous media's similitude theory) is developed. Field-averages and variances of variables associated with the flow are calculated according to this model and compared with actual ones measured all over the field-plot.

Fourteen sites equipped for measuring water content (neutron access tubes) and water pressure (tensiometers) are chosen in such a way that they represent the statistical distribution of a single parameter showing the textural variation in this loamy soil.

The experimental results show that the steady-state approach is reasonable for water content on a weekly basis but is questionable for water pressure. Agreement between the deterministic model with a fitted water extraction model and the measurements at two sites is correct in the irrigated row and their differences, particularly in the driest parts of the soil, are discussed. The stochastic approach gives averaged water-content values close to the experimental ones but underestimates the variances, especially for sorghum. Although for this particular field plot deterministic modelling cannot be rejected as far as water content is concerned, the estimation of the mean behavior through tensiometric measurements seems rather risky.

RÉSUMÉ

Une parcelle expérimentale de 2500 m² de superficie a été cultivée et microirriguée afin de comparer la théorie présentée dans la première partie de cet article avec des mesures au cours de deux campagnes agricoles (sorgho, maïs). En outre, un modèle stochastique conceptuel prenant en compte la variabilité des caractéristiques hydrodynamiques du sol au moyen d'un facteur d'échelle (théorie de la similitude en milieu poreux) est développé. Il permet de calculer moyennes et variances à l'échelle de la parcelle de variables liées à l'écoulement non saturé qui sont également confrontées à l'expérience.

Quatorze sites de mesures de la teneur en eau (humidimétrie neutronique) et de la pression

(tensiométrie) ont été choisis de manière à restituer la distribution statistique d'un paramètre représentatif de la variation texturale du sol (argilo-limoneux).

Les résultats expérimentaux montrent que l'hypothèse du régime permanent est convenable en ce qui concerne la teneur en eau à un pas de temps hebdomadaire mais qu'elle est discutable pour la pression. L'accord entre le modèle déterministe dont l'extraction racinaire est obtenue par calage et les mesures effectuées en deux sites est correct dans l'interligne irrigué et leurs écarts, notamment dans les parties les plus sèches, sont discutés. L'approche stochastique conceptuelle restitue convenablement les valeurs moyennes des mesures de la teneur en eau mais en sous-estime les variances, en particulier pour le sorgho. Sur cette parcelle, une approche déterministe de l'écoulement ne semble pas néanmoins devoir être rejetée, par contre l'estimation du "comportement moyen" grâce à des mesures tensiométriques paraît hasardeuse.

INTRODUCTION

La maîtrise technique de la microirrigation passe par la connaissance de l'écoulement non saturé engendré par ce mode d'arrosage dont les performances dépendent étroitement des caractéristiques hydrodynamiques du sol irrigué. Or, cette connaissance bute sur la relative complexité de l'écoulement résultant d'une part du transfert à proximité des goutteurs et d'autre part de la variabilité du sol à l'échelle de la parcelle qui est bien reconnue et abondamment relatée dans la littérature depuis l'étude de Nielsen et al. (1973). Des hypothèses simplificatrices permettent d'établir des modèles au moyen desquels la répartition de l'humidité du sol peut être calculée en un point où le sol est homogène comme on l'a vu dans la première partie de cet article (Boulier et Vauclin, ce volume, notée Partie 1 dans la suite), mais aussi à l'échelle du périmètre irrigué grâce à une approche stochastique conceptuelle qui va être développée dans cette deuxième partie. Toutefois la représentativité de ces modélisations dépend des approximations faites, c'est pourquoi il convient de les confronter à une expérience in-situ.

L'écoulement bidimensionnel plan correspondant à des lignes de goutteurs rapprochés a été abordé dans Partie 1 à l'instar de plusieurs auteurs en supposant que le régime est permanent et que la conductivité hydraulique non saturée $K(m^{-1}s)$ varie exponentiellement avec la pression effective $h(m)$. Nous avons explicité la solution de l'équation de Richards décrivant l'écoulement dans les cas où l'extraction racinaire est une fonction connue des coordonnées d'espace et en supposant qu'une bande saturée s'étend à la surface du sol de chaque côté de la ligne source. Malgré l'intérêt théorique suscité par cet écoulement (voir P1), les expériences lui correspondant sont peu nombreuses (Thomas et al., 1976; Batu, 1977) et assez éloignées des conditions réelles puisque réalisées au laboratoire et sans culture.

La représentation de la variabilité spatiale des sols au moyen d'un facteur d'échelle illustrée et discutée par de nombreux auteurs (Warrick et al., 1977a; Russo et Bresler, 1980; Sharma et al., 1980; Vauclin et al., 1983) paraît être un outil intéressant notamment lorsqu'un objectif de modélisation est visé. Jointe à une description du transfert par l'équation de Richards ou une de ses approximations, la mise en facteur d'échelle des propriétés hydrodynamiques conduit à des modèles stochastique-conceptuels qui ont été mis en oeuvre

notamment par Peck et al. (1977), Warrick et al. (1977b), Russo et Bresler (1982), Vauclin et al. (1983), Bresler et Dagan (1983), Boulier et Vauclin (1984) dans le cas d'écoulements monodimensionnels verticaux correspondant à diverses conditions aux limites. Nous développons ici brièvement le cas du régime permanent bidimensionnel et renvoyons le lecteur à Boulier (1985) pour de plus amples détails. Si l'étude expérimentale de la variabilité de l'humidité ou de la pression a été menée d'un point de vue statistique et géostatistique (Russo, 1984a; Sadding et al., 1985) il n'existe pas à notre connaissance d'étude relative à l'écoulement microirrigué comparant les modèles à l'expérience à l'exception de Russo (1983, 1984b) qui s'intéresse à la pression en un point particulier de la maille du réseau d'irrigation.

Le but de la 2ème partie de cet article est de comparer les mesures réalisées sur une parcelle microirriguée et les modèles d'écoulement d'une part, déter-

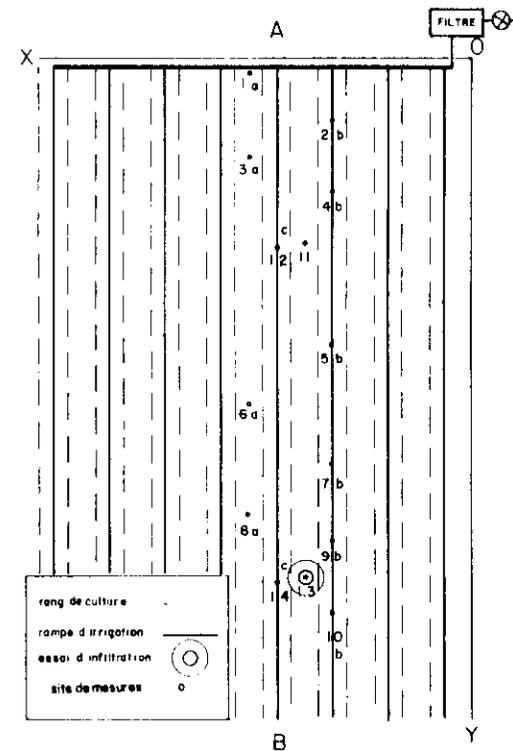


Fig. 1. Plan de la parcelle expérimentale.

Fig. 1. Experimental set up.

ministe (développés dans Partie 1) et correspondant à un point particulier de la parcelle et d'autre part stochastique conceptuel relatif à toute la parcelle. Les hypothèses sous-tendant ces modèles sont discutées en relation avec les observations et les prédictions des modèles sont confrontées aux mesures afin de juger la représentativité des modélisations proposées.

EXPÉRIMENTATION ET PROTOCOLES DE MESURES

L'étude expérimentale a été conduite sur une parcelle rectangulaire longue de 150 m et de 2500 m² de superficie (Fig. 1), située au Tholonet (France). La pente moyenne de ce terrain est de 3% environ selon le transect AB, ligne de plus grande pente. Le sol, argilo-limoneux, est constitué de colluvions quaternaires surmontant des argilites rouges.

Les cultures annuelles retenues: sorgho en 1983 (*Sorghum bicolor*, variété Argence) et maïs en 1984 (*Zea mays*, variété Brio 42) ont été semées respectivement les 18/7/83 et 15/5/84 en lignes parallèles au transect AB distantes de 0,75 m. Un interligne sur deux était irrigué par une rampe sur laquelle des capillaires de débit nominal 5,56 10⁻⁷ m³s⁻¹ (21 h⁻¹) étaient régulièrement espacés de 0,5 m. La maille irriguée est donc un rectangle de 0,75 m². La microirrigation a débuté après la levée des cultures (apports par aspersion pendant la germination). Les deux apports quotidiens (à midi et à minuit) étaient commandés par un programmeur. La dose d'arrosage D_c (m), constante pour chaque semaine a été calculée au moyen de la formule:

$$D_c = 0,8 k ETP \quad (1)$$

où ETP (m) est l'évapotranspiration potentielle moyenne des dix dernières années, k est le coefficient cultural relatif à la culture et à son stade phénologique établi pour l'irrigation par aspersion et 0,8 est un coefficient correctif tenant compte de la plus grande efficacité de l'eau en microirrigation. En cas de pluie importante (survenue à la fin du mois d'août, les deux années) de lame cumulée P mesurée sur la parcelle, la dose journalière de la semaine suivante était diminuée de $P/7$.

On notera que des contrôles systématiques du débit des goutteurs sur les rampes ont montré une bonne uniformité spatiale des apports d'eau en 1983. En revanche, en 1984, une hétérogénéité a pu être observée: décroissance du débit de l'amont (A) vers l'aval (B) (voir Figure 1).

Choix des sites de mesure du bilan hydrique

Afin d'instrumenter la parcelle, une analyse texturale du sol a été effectuée par prélèvements d'échantillons à la profondeur $z = 0,60$ m.

Les moyennes μ , variances σ^2 , les coefficients d'asymétrie γ_1 , d'aplatissement γ_2 et de variation ($CV = \sigma/\mu$) des classes granulométriques calculées à partir des cinquante échantillons sont reportés dans le Tableau 1. Les tests statistiques portant sur γ_1 et γ_2 amènent à ne pas rejeter au risque 5% la normalité

TABLEAU 1

Premiers moments centrés des distributions statistiques des classes granulométriques (SG - sable grossier; SF - sable fin; LI - limon; AR - argile)

	μ	σ^2	γ_1	γ_2	CV	ρ^2
SG	11,69	23,29	-0,3445	2,480	0,412	0,587
SF	28,49	40,01	0,6293	4,632	0,222	0,694
LI	26,91	20,24	0,2046	3,937	0,167	0,696
AR	30,47	43,95	0,0121	2,158	0,217	0,938
Log SG	2,327	0,345	-1,493	4,808	0,252	0,590
Log SF	3,324	0,049	-0,207	3,179	0,067	0,703
Log LI	3,277	0,030	-0,754	6,013	0,053	0,660
Log AR	3,391	0,052	-0,484	2,994	0,067	0,903

des lois empiriques obtenues à l'exception de celles du taux de sable fin, du logarithme des taux de sable grossier et du limon. La variabilité de la texture est moyenne ($0,17 < CV < 0,41$), le taux d'argile ayant la plus forte variance.

La médiane granulométrique D50 a été choisie comme indicateur réducteur de cette variabilité texturale. Les coefficients ρ^2 de régression linéaire entre $\ln(D50)$ et les différentes classes granulométriques ou leurs logarithmes (indiqués en dernière colonne du Tableau 1) montrent que ce paramètre est bien corrélé aux fluctuations de la texture et justifie donc notre choix.

La Fig. 2 présente l'évolution de $\ln(D50)$ le long du transect AB (Fig. 2a) et les fréquences cumulées expérimentales (Fig. 2b). L'hypothèse de normalité de la distribution de $\ln(D50)$ dont la moyenne est $\mu_{\ln(D50)} = 2,46$ et la variance est $\sigma_{\ln(D50)}^2 = 0,49$, n'est pas à rejeter au risque de 5%, d'après les tests sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

En admettant que D50 constitue également un bon indicateur de la variabilité des caractéristiques hydrodynamiques du sol, dix sites numérotés de 1-10 ont été sélectionnés dans la loi de distribution de $\ln(D50)$ (Fig. 2). Chaque site a été équipé de deux tensiomètres aux profondeurs $z = 0,30$ et $0,60$ m et d'un tube d'accès pour humidimètre neutronique (1,50 m de profondeur). Les sites 1, 3, 6 et 8 ont été sélectionnés dans l'interligne sec, proche du transect AB, et les sites 2, 4, 5, 7, 9 et 10 dans l'interligne irrigué (Fig. 1). De plus, deux couples de sites voisins, numérotés (11, 12) et (13, 14) sur la Fig. 2b, ont été plus densément instrumentés: un tube d'accès neutronique et cinq tensiomètres à $z = 0,15, 0,30, 0,60, 0,90$ et $1,20$, afin d'observer l'évolution locale de l'humidité et de la pression. On notera que les sites 11 et 13 sont situés dans l'interligne sec 12 et 14 dans l'interligne irrigué (Fig. 1). Ces différents sites, ainsi instrumentés ont été choisis de telle sorte que la variation du $\ln(D50)$ y soit représentative de la fluctuation observée sur l'ensemble du transect AB, mais avec une densité de mesures quatre fois plus élevée. Ainsi, quatre sites [5, (11, 12), 6 et 9] sont proches de la moyenne $\mu_{\ln(D50)}$, trois sites proches de $\mu_{\ln(D50)} - \sigma_{\ln(D50)}$, (2, 3, 4) et de $\mu_{\ln(D50)} + \sigma_{\ln(D50)}$ [8, 10, (13, 14)]. Enfin, les deux extrêmes (1, 7) de l'échantillon initial ont été retenus (Fig. 2b).

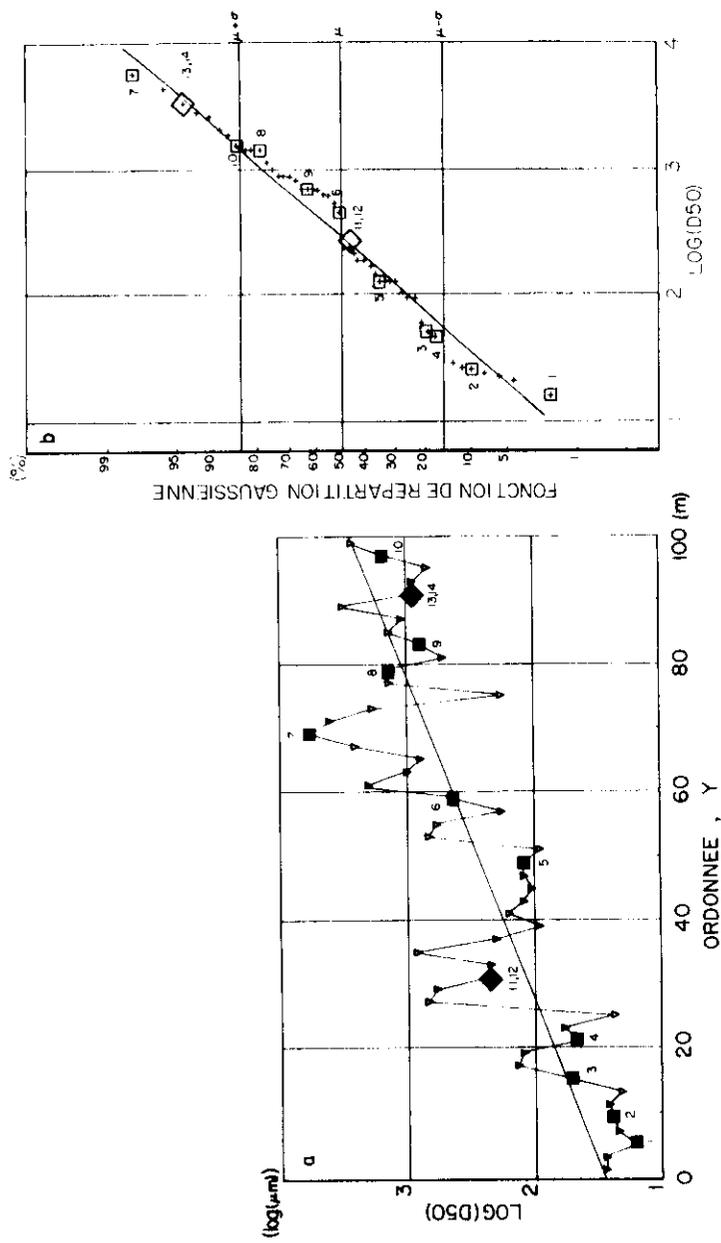


Fig. 2. Variations de la médiane granulométrique le long du transect AB (a) et fréquences cumulées expérimentales (b). Les nombres correspondent aux sites de mesures.

Fig. 2. Variations of the median particle size along the transect AB (a) and experimental cumulative frequencies (b). Numbers correspond to the measurement sites.

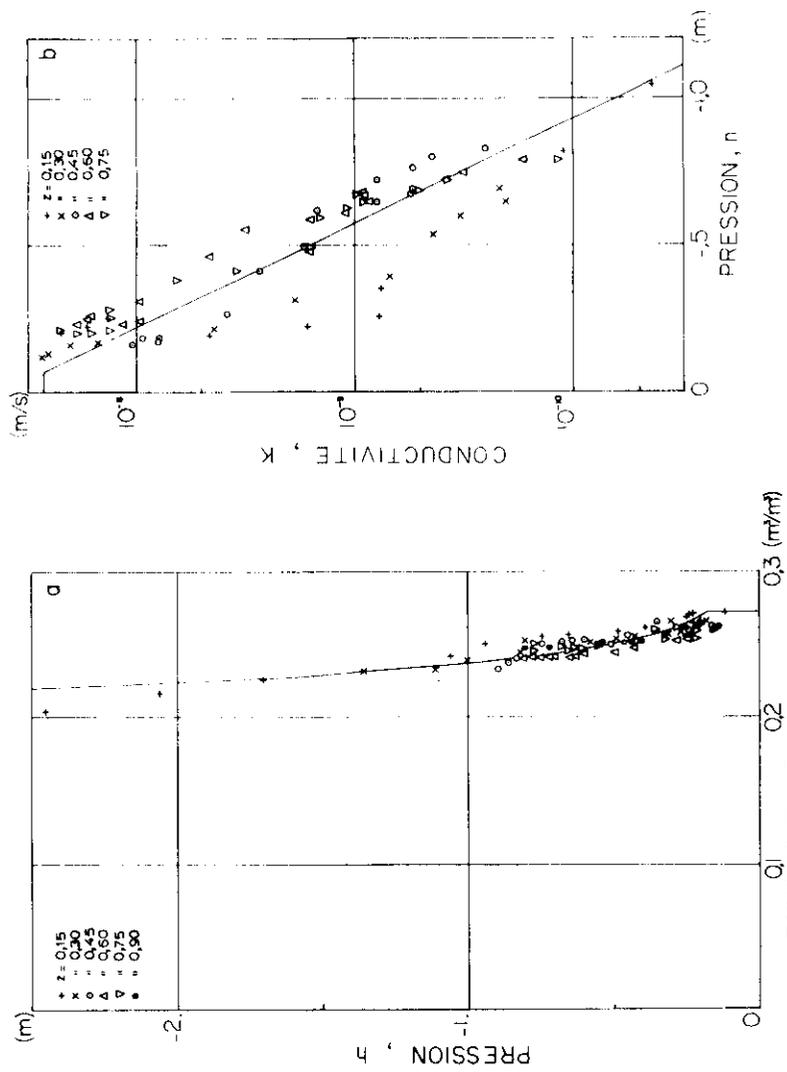


Fig. 3. Relations pression-teneur en eau (a) et conductivité hydraulique-pression (b) mesurées au site 13. Les lignes continues correspondent aux expressions analytiques d'ajustement, eqns. (2) et (3) du texte.

Fig. 3. Relationships water pressure head water content (a) and hydraulic conductivity water pressure head (b) measured at site 13. Continuous lines correspond to the analytical best-fitting expressions, eqns. (2) and (3) in the text.

La moyenne et l'écart-type de l'échantillon réduit à ces douze sites sont respectivement égaux à 2,46 et 0,82, c'est à dire égal à la moyenne et supérieur de 15% à l'écart-type de la distribution des 50 observations. On est enclin à penser que les moyennes et variances des observations en ces sites sont plus proches des espérances mathématiques et des variances de la population sous-jacente que celles qui auraient été obtenues en des sites choisis arbitrairement. Sous l'hypothèse d'ergodicité, les espérances sont égales aux valeurs moyennes spatiales: pour le bilan hydrique, par exemple, la moyenne des consommations observées en ces douze sites constitue une bonne estimation de la consommation moyenne des cultures sur la parcelle.

De plus, en chacun des douze sites, la porosité a été estimée à partir d'une mesure de l'indice des vides effectuée au moyen d'essais oedométriques sur échantillons non remaniés pris à $z = 0,45$ m. Il apparaît qu'elle est peu variable sur le transect AB (moyenne = $0,301 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$; coefficient de variation = 5%).

Caractérisation hydrodynamique du sol: point de vue local

Un essai classique de drainage interne effectué entre les deux campagnes agricoles sur le site 13 (Fig. 1) a permis de déterminer les caractéristiques hydrodynamiques du sol, en ce lieu. Les mesures neutroniques et tensiométriques pendant la phase de redistribution (surface du sol couverte pendant trois jours, puis découverte pendant un mois) consécutive à un apport d'eau de 0,045 m dans un infiltromètre double-anneaux, ont permis d'obtenir, à différents horizons les courbes de rétention (Fig. 3a) et de conduction hydraulique (Fig. 3b). Les valeurs expérimentales ont été lissées par les modèles statistiques suivants:

$$\begin{aligned} h(\theta) &= h_0 \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{sat}}} \right)^{p'}, & \text{pour } h < h_0 \\ h(\theta) &= h_0, & \text{pour } h \geq h_0 \end{aligned} \quad (2)$$

avec: $h_0 = -0,181$ m d'eau; $\theta_{\text{sat}} = 0,271 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$; $p' = -12,3$ (coefficient de détermination = 0,72 pour 102 couples):

$$\begin{aligned} K(h) &= K_0 \exp [\alpha (h - h_e)], & \text{pour } h < h_e \\ K(h) &= K_0, & \text{pour } h \geq h_e \end{aligned} \quad (3)$$

avec: $K_0 = 3,53 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$; $\alpha = 6,47 \text{ m}^{-1}$; $h_e = -0,065$ m (coefficient de détermination = 0,83 pour 69 couples).

On notera que la teneur en eau à saturation naturelle θ_{sat} a été estimé à 90% de la porosité.

Variabilité spatiale des caractéristiques hydrodynamiques

La lourdeur et le coût des essais de drainage interne rendent cette technique

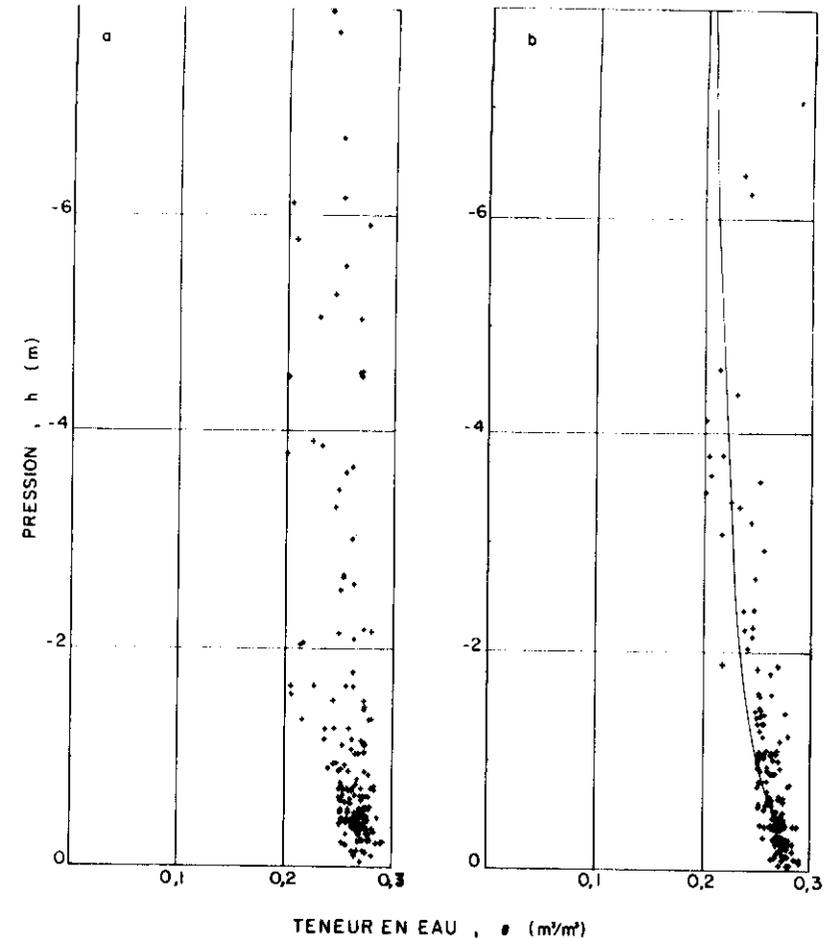


Fig. 4. Relations pression-teneur en eau: (a) valeurs brutes; (b) valeurs mises en échelle. La ligne continue correspond à la moyenne d'échelle, éqn. (4) du texte.

Fig. 4. Relationships water pressure head-water content: (a) raw values; (b) scaled values. The continuous line corresponds to the mean scaled relation, eqn. (4) in the text.

difficilement utilisable dès lors que l'on souhaite appréhender la variabilité spatiale des propriétés hydrodynamiques. Cette étude a été menée sur les seules courbes de rétention obtenues par mesures neutroniques et tensiométriques au cours de la première campagne agricole (sorgho). Les résultats correspondant à 17 points de mesures (sites et profondeurs non différenciés) sont donnés Fig.

4a. Les valeurs de pression, mises en échelle, selon la procédure donnée en annexe, sont reportées Fig. 4b, ainsi que la moyenne d'échelle définie par:

$$h^*(\theta) = h_0^* \left(\frac{\theta}{\theta_{sat}} \right)^p \quad (4)$$

avec $h_0^* = 0,416 \text{ m}$ et $p = -11,2$.

Les facteurs d'échelle résultant suivent une loi de distribution log-normale ($\mu_A = 0,176$; $\sigma_A^2 = 0,46$ avec $A = \ln a$).

Ainsi, la courbe de rétention du sol en tout point l est définie par:

$$h_l(\theta) = \frac{h_0^*}{a_l} \left(\frac{\theta}{\theta_{sat}} \right)^p \quad (5)$$

On notera qu'au site 13, $a_{13} = 2,26$ et d'après les équations de l'Annexe (A1) et (4), la courbe de rétention correspondante est:

$$h_{13}(\theta) = \dots 0,184 \left(\frac{\theta}{\theta_{sat}} \right)^{11,2} \quad (6)$$

Elle est donc très voisine de celle qui a été déterminée indépendamment, lors de l'essai de drainage interne (éqn. 2).

La variabilité de la conductivité hydraulique n'a pu être étudiée expérimentalement. Néanmoins, l'hypothèse de similitude géométrique des milieux poreux (Miller et Miller, 1958) conduit à la relation:

$$K_l(h) = a_l^2 K^*(h^*) \quad (7)$$

où $K^*(h^*)$ est la conductivité moyenne d'échelle.

En posant:

$$K^*(h^*) = K_0^* \exp [\alpha^*(h^* - h_0^*)] \quad (8)$$

l'identification au site 13 des éqns. (3) et (7) après avoir introduit l'éqn. (8) conduit aux valeurs suivantes: $K_0^* = K_0/a_{13}^2 = 6,91 \times 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$; $\alpha^* = \alpha/a_{13} = 2,86 \text{ m}^{-1}$; $h_0^* = h_0/\alpha/\alpha^* = 0,147 \text{ m}$.

On notera qu'au plan expérimental seule la bonne uniformité de la porosité mesurée ($CV = 5\%$) accrédite l'hypothèse de la similitude géométrique utilisée ici pour pouvoir décrire la variabilité de la conductivité hydraulique, par la théorie des facteurs d'échelles, qui a été utilisée par ailleurs (Warrick et al., 1977a; Russo et Bresler, 1982; Vauclin et al., 1983) avec un succès certain.

COMPARAISON MODÈLE EXPÉRIENCE: POINT DE VUE LOCAL

Pertinence de l'hypothèse de régime permanent

Les modèles d'écoulement présentés dans Partie 1 de cette étude reposent sur un certain nombre d'hypothèses dont celle du régime permanent qu'il convient de tester. Compte-tenu de la variation au cours de la journée du taux d'extraction racinaire et des apports irrigués pendant de courtes périodes c'est au

TABLEAU 2

Stocks hydriques (mm) mesurés sur (0-0,6m) aux 14 sites: 6 s (S) et 8 irrigués (I)

Dates	Sites														Moyenne		Écart-type	
	1 (S)	2 (I)	3 (S)	4 (I)	5 (I)	6 (S)	7 (I)	8 (S)	9 (I)	10 (I)	11 (S)	12 (I)	13 (S)	14 (I)	S	I	S	I
27/09/83	169	151	175	181	177	178	158	159	175	180	167	177	144	185	165	173	12	12
4/10/83	166	156	175	182	178	148	173	147	180	182	161	183	133	183	155	177	15	9
11/10/83	163	167	171	181	176	143	177	145	178	175	163	183	131	180	153	177	15	5
19/7/84	168	169	159	182	181	148	145	141	169	153	131	194	146	180	149	172	13	16
26/7/84	172	160	152	180	176	148	151	120	164	145	131	191	126	178	141	168	19	15

moins au pas de temps hebdomadaire que cette hypothèse peut prendre son sens. Les évolutions des teneurs en eau à ce pas de temps, aux divers sites et à plusieurs profondeurs mettent en évidence deux périodes (sans épisode pluvieux) où un régime quasi-permanent paraît être établi: du 27/09 au 11/10/83, arrière saison chaude où l'irrigation du sorgho a été maintenue à $D_p = 2,6 \times 10^{-3} \text{ m jour}^{-1}$, et du 19/07 au 26/07/84 pendant lequel le maïs a été irrigué à une dose de $4,8 \times 10^{-3} \text{ m j}^{-1}$. Les valeurs correspondantes du stock d'eau contenu dans les 60 premiers centimètres, données Tableau 2, montrent une bonne stabilité temporelle, compte-tenu des incertitudes ($\pm 12 \text{ mm}$) liées aux mesures de teneur en eau par humidimétrie neutronique ($\Delta\theta = \pm 0,01 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$). Le modèle d'écoulement dans une maille d'irrigation est validé sur les sites 13 et 14, car les propriétés hydrodynamiques du sol y ont été déterminées.

La Fig. 5 donne les évolutions des charges hydrauliques mesurées aux sites 13(a) et 14(b) pour la période du 19/09 au 11/10/83. Après une première semaine de transition, (les écarts-types des fluctuations de la charge hydraulique à $z = 0,60 \text{ m}$ valent 0,195 et 0,160 m aux sites 13 et 14 respectivement), les charges se stabilisent dans des intervalles d'amplitude 0,30 m environ ($\sigma_H = 0,085$ et 0,074 m pour les sites 13 et 14) à l'exception des mesures effectuées à $z = 0,15$ et 0,30 m au site 13, qui est situé dans l'interligne sec. La Fig. 6 présente les mesures correspondant à la période du 12/07 au 27/07/84. On observe de nouveau une certaine stabilité des charges aux profondeurs égales ou supérieures à 0,60 m pendant les deux premières semaines. En revanche, les mesures effectuées à $z = 0,15$ et 0,30 m sont beaucoup plus variables durant toute la période. On notera également que des mesures ont présenté des anomalies notamment près de la surface sur le site 13, dues probablement à la présence de racines au voisinage des capsules tensiométriques. En conclusion, si l'hypothèse d'un régime quasi-permanent est acceptable pour les teneurs en eau, elle est plus discutable pour les pressions.

MODÉLISATION DÉTERMINISTE DE L'ÉCOULEMENT DANS LA MAILLE IRRIGUÉE

L'écoulement dans la maille irriguée correspondant aux sites 13 et 14, dont les caractéristiques hydrodynamiques du sol sont données par les éqns. (2) et (3) a été modélisé par éqn. (5), Partie 1:

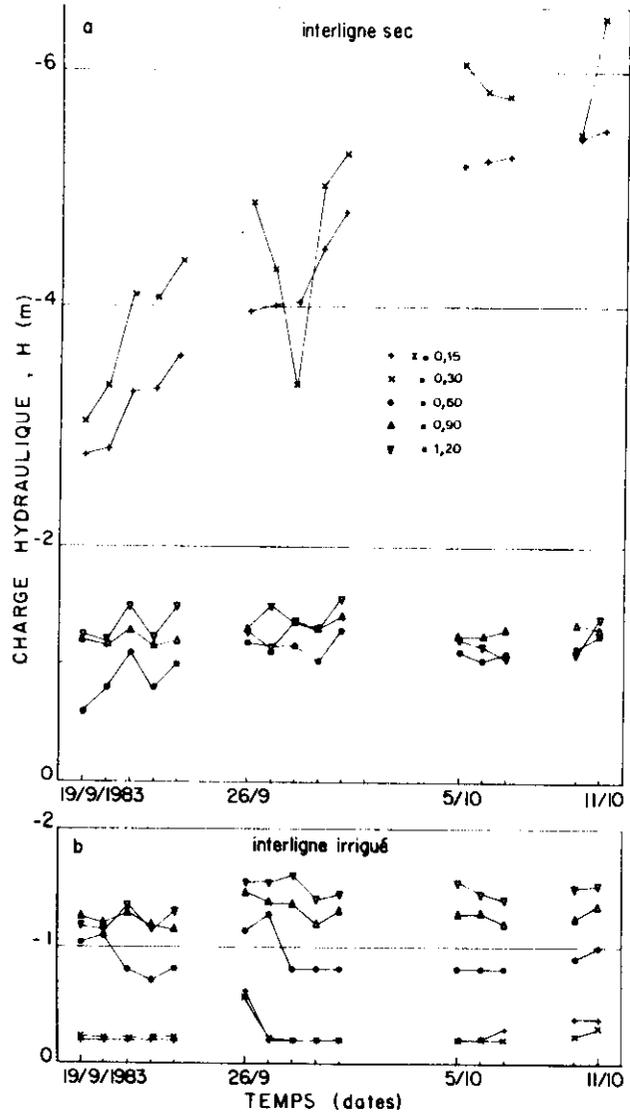


Fig. 5. Culture de sorgho: évolution des charges hydrauliques mesurées aux sites 13(a) et 14(b).

Fig. 5. Sorghum crop; time evolution of hydraulic heads measured at sites 13(a) and 14(b).

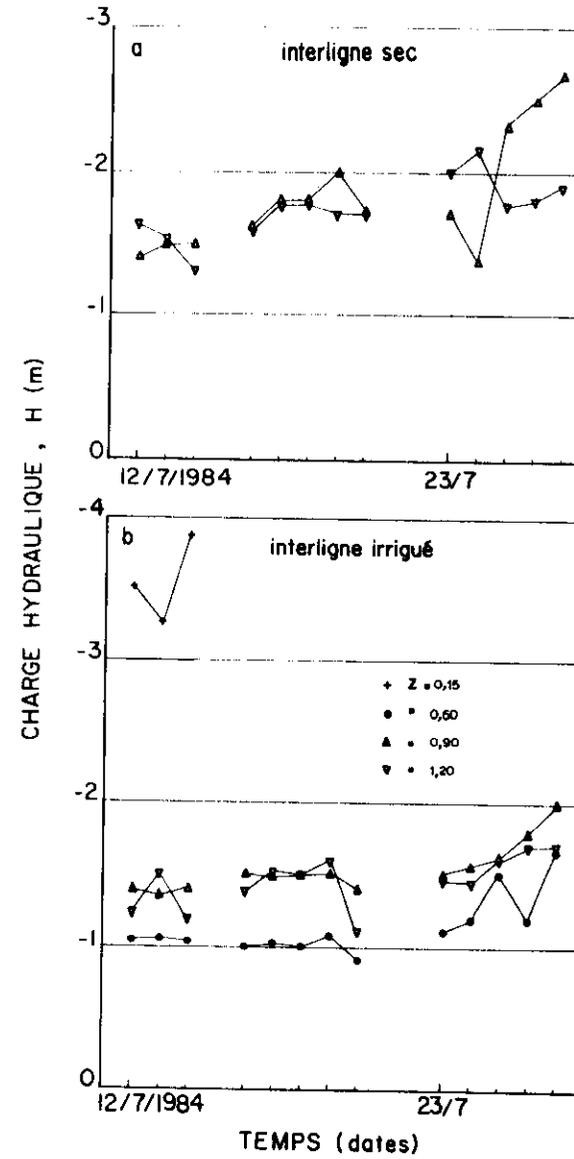


Fig. 6. Culture de maïs; évolution des charges hydrauliques mesurées aux sites 13(a) et 14(b).

Fig. 6. Maize crop; time evolution of hydraulic heads measured at sites 13(a) and 14(b).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial U}{\partial z} - R = 0 \quad (9)$$

Compte-tenu du nombre relativement réduit de points de mesures au sein de la maille irriguée, l'extraction racinaire est schématisée par une forme très simple et choisie par commodité égale à :

$$R = R_0 \exp(-\eta z) \quad (10)$$

Ce modèle, du type (2) selon la dénomination de Partie 1, assez rudimentaire, dépend de deux paramètres R_0 et η qui sont déterminés par calage.

Sur les frontières Γ , du domaine d'écoulement Ω , les conditions suivantes ont été imposées: (1) flux latéral nul sur Γ_3 [Partie 1, éqn. (7)]; (2) flux vertical $q_s = 0$ sur Γ_4 située à $z_0 = 1,20$ m [Partie 1, éqn. (6a)]; (3) potentiel $U = U_0$ sur Γ_1 (tache mouillée de largeur $2x_1$ entourant le goutteur [Partie 1, éqn. 8]); et (4) flux d'évaporation q_{em} dépendent linéairement du potentiel de Kirchhoff sur Γ_2 [Partie 1, éqn. (9b)].

La résolution des éqns. (9) et (10) associées aux conditions aux limites ci-dessus est semblable à celle rapportée dans Partie 1 pour l'écoulement dans le sol "Chino-clay". Le nombre d'harmoniques utilisées est $N = 60$. Les valeurs imposées sont l'évaporation maximum du sol q_{em} et le débit total de la tache mouillée à la surface, prise égale à la dose journalière d'irrigation D_e . Les paramètres à déterminer sont la demi-largeur x_1 de la zone saturée et les valeurs R_0 et η décrivant l'extraction racinaire. Ils ont été obtenus selon la procédure suivante:

(1) Calcul par algorithme dichotomique du plus petit x_1 physiquement admissible et de la consommation racinaire (CR) de telle sorte que le bilan de masse:

$$CR + \frac{1}{x_0} \int_{x_1}^{x_0} q_{em} \frac{U}{U_0} dx = D_e \quad (11)$$

soit satisfait.

(2) choix de η telle que $CR = R_0 [1 - \exp(-\eta z_0)]/\eta$ dans l'intervalle des valeurs admissibles $|\eta_1, \eta_2|$ déterminé numériquement par ajustement aux mesures.

Le Tableau 3 donne pour les deux périodes d'étude retenues, les valeurs des intrants du modèle (D_e, q_{em}) et les valeurs déterminées par celui-ci (x_1, CR, η_1, η_2) ainsi que les valeurs η obtenues par calage aux valeurs expérimentales.

Les charges hydrauliques calculées et mesurées sont comparées sur les Figs. 7 et 8 pour le sorgho (du 20/09 au 11/10/83) et le maïs (19/07 au 26/07/84), respectivement. Les mesures sont obtenues, soit directement au moyen des tensiomètres, soit par l'intermédiaire des mesures neutroniques transformées en charge hydraulique, au moyen de la courbe de rétention, éqn. (2).

L'accord entre théorie et observations paraît médiocre dans l'absolu, mais relativement correct notamment pour le site 14, situé dans l'interligne irrigué. En revanche, les écarts sont plus importants pour le site 13 (interligne sec). A

TABLEAU 3

Modélisation déterministe au site 13: paramètres intrants (D_e, q_{em}) et calculés

Périodes	D_e (mm j ⁻¹)	q_{em} (mm j ⁻¹)	x_1 (m)	CR (mm j ⁻¹)	η_1 (m ⁻¹)	η_2 (m ⁻¹)	η (m ⁻¹)
20/9 11/10/83 (sorgho)	2,60	1,0	0,0289	2,52	0,683	0,565	0,630
19/7 26/7/84 (maïs)	4,80	2,0	0,0918	4,62	0,671	0,630	0,667

notre avis, ils sont imputables autant à la résolution numérique qu'aux mesures. En effet, la précision numérique du modèle n'excède pas $U/U_0 = 10^{-3}$ car la solution du problème mathématique est tronquée à ses 60 premiers termes et leur calcul dépend de la résolution d'un système linéaire dont la matrice est "assez pleine" [Partie 1, éqn. (25)]. Compte-tenu de l'atténuation capillaire $\alpha = 6,47$ m⁻¹ déterminée au site 13, cette imprécision correspond à $h = -1,2$ m, soit la limite inférieure de la gamme de pression explorée lors de l'essai de drainage interne. D'autre part, les mesures tensiométriques dans l'interligne sec, influencées par l'évaporation, montrent que l'existence d'un régime permanent n'est pas assuré.

On notera que la modélisation adoptée pour l'extraction racinaire conduit

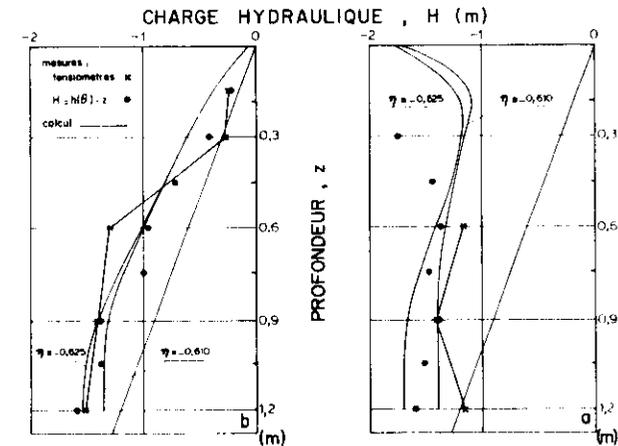


Fig. 7. Culture de sorgho (20/9-11/10/83); profils de charge hydraulique calculés et observés aux sites 13(a) et 14(b). Les barres horizontales correspondent à la gamme des fluctuations temporelles des mesures tensiométriques.

Fig. 7. Sorghum crop (20/9-11/10/83); calculated and observed hydraulic head profiles at sites 13(a) and 14(b). The horizontal bars correspond to the range of the time fluctuations of tensiometer readings.

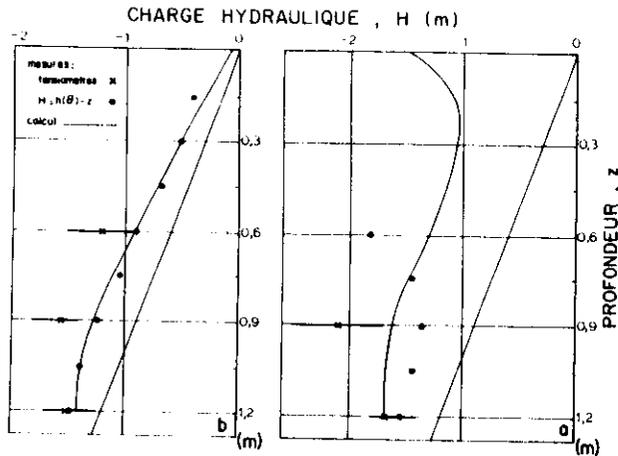


Fig. 8. Culture de maïs (19/7-26/7/84); profils de charge hydraulique calculés et observés aux sites 13(a) et 14(b). Les barres horizontales correspondent à la gamme des fluctuations temporelles des mesures tensiométriques.

Fig. 8. Maize crop (19/7-26/7/84); calculated and observed hydraulic head profiles at sites 13(a) and 14(b). The horizontal bars correspond to the range of the time fluctuations of tensiometer readings.

à des valeurs négatives de η_1 et η_2 (Tableau 3), c'est à dire à des densités de consommation hydrique des cultures augmentant avec la profondeur. Cette situation, relativement improbable en général, a pu néanmoins se produire ici, car les mesures tensiométriques mettent en évidence un horizon saturé à $z = 0,3$ m, néfaste à l'activité des racines.

Il apparaît que l'approche déterministe du régime permanent avec une extraction racinaire très schématisée est une approximation raisonnable de l'écoulement observé en un site de cette parcelle microirriguée. Toutefois, le non-rejet de cette approche repose en partie sur l'imprécision des observations effectuées. En outre, le modèle de régime permanent proposé (existence d'une bande saturée à la surface) est sur ce type de sol plus réaliste que celui issu d'une source ponctuelle, puisqu'au site le plus perméable, cette zone est voisine de dix centimètres, pour le maïs.

COMPARAISON D'UN MODÈLE STOCHASTIQUE-CONCEPTUEL AVEC L'EXPÉRIENCE

Le modèle déterministe vient d'être comparé aux observations en un site particulier. Qu'advient-il de sa représentativité à l'échelle de la parcelle? Les caractéristiques hydrodynamiques du sol y présentent en effet une variabilité spatiale importante qui a été évaluée expérimentalement pour les courbes de rétention. L'analyse porte maintenant sur l'impact de cette variabilité dans le cas du régime permanent d'écoulement d'une part au moyen des mesures

effectuées pendant les deux périodes déjà étudiées et d'autre part avec un modèle stochastique conceptuel.

Hypothèses de la modélisation proposée

La parcelle irriguée est assimilée à une collection de M colonnes hydrodynamiquement indépendantes dont la géométrie est celle de la maille irriguée: parallélépipède de hauteur z_0 et de surface horizontale rectangulaire de cotés $2x_0$ et $\Delta y = 0,5$ m correspondant à la distance entre deux goutteurs sur la rampe.

L'écoulement permanent de l'eau engendré par la plante et par le goutteur situé au centre de la section horizontale d'une maille quelconque m est supposé bidimensionnel dans un plan perpendiculaire à la rangée des goutteurs. Il est décrit par des éqns. de type (9) et (10).

Les propriétés hydrodynamiques modélisées par les relations analytiques (2) et (3) sont invariantes au sein de la maille m , mais varient d'une maille à l'autre. Cette variabilité est décrite par un facteur d'échelle a_m , associé à chaque maille et dont la loi de distribution expérimentale est log-normale. L'écoulement dans chaque maille est donc décrit par les équations:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_m \alpha^* \frac{\partial U}{\partial z} - R = 0 \quad (12)$$

$$R = R_0 \exp(-\eta z)$$

associées aux conditions aux limites suivantes:

$$U = a_m K_0^* / \alpha^*, \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (13a)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z} + a_m \alpha^* U = -q_{em} \frac{\alpha^* U}{K_0^* a_m}, \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (13b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (13c)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + a_m \alpha^* U = 0, \quad \text{sur } \Gamma_4 \quad (13d)$$

où $\alpha^* = 2,86 \text{ m}^{-1}$ et $K_0^* = 6,91 \times 10^{-8} \text{ m s}^{-1}$.

De plus, d'après l'éqn. (11), le bilan de masse s'écrit:

$$CR + \frac{1}{x_0} \int_{x_1}^{x_0} q_{em} \frac{\alpha^*}{K_0^* a_m} U dx = D_e \quad (14)$$

On notera que les conditions aux limites et l'extraction racinaire dépendent de façon explicite et implicite, respectivement, du facteur d'échelle a_m .

L'écoulement à l'échelle de la parcelle est donc décrit par un modèle stochastique. Les variables d'état $U(x, z, a)$, donc $h(x, z, a)$ ou $\theta(x, z, a)$, solutions des éqns. (12), (13), (14), apparaissent comme des variables aléatoires dont les

distributions statistiques dépendent de l'écoulement dans chaque maille qui obéit à une équation aux dérivées partielles déterministe et de la loi de probabilité des facteurs d'échelle a .

La résolution du régime permanent étant effectuée pour chaque maille, l'estimation des p premiers moments de la solution stochastique est obtenue par une méthode fondée sur l'intégrale de Riemann-Stieljes (Boulier, 1985) et brièvement rappelée ici.

Soit $Y(x, z, a)$ une fonction de la variable aléatoire a et dépendant de façon déterministe de x et z . L'espérance mathématique, $E[Y^p(x, z, a)]$ avec p entier positif, peut être estimée par:

$$E[Y^p(x, z, a)] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} Y^p(x, y, a_{m+\frac{1}{2}}) \quad (15)$$

avec:

$$a_{m+\frac{1}{2}} = (a_m + a_{m+1})/2 \quad m = 1, \dots, M-1$$

et:

$$\frac{m}{M} = \int_0^{a_m} \frac{1}{a\sigma_A\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\ln a - \mu_A}{\sqrt{2}\sigma_A}\right)^2\right] da \quad m = 1, \dots, M-1$$

puisque $A = \ln a$ suit une loi normale de distribution.

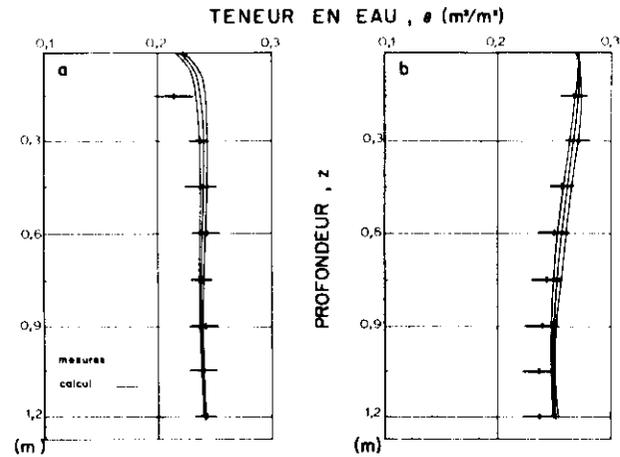


Fig. 9. Culture de sorgho (20/9 11/10/83); profils hydriques moyens et écarts-types calculés et observés. (a) interlignes secs (six sites de mesures); (b) interlignes irrigués (huit sites de mesures).

Fig. 9. Sorghum crop (20/9 11/10/83); mean water content profiles and standard deviations calculated and observed. (a) dry rows (six measurement sites); (b) irrigated rows (eight measurement sites).

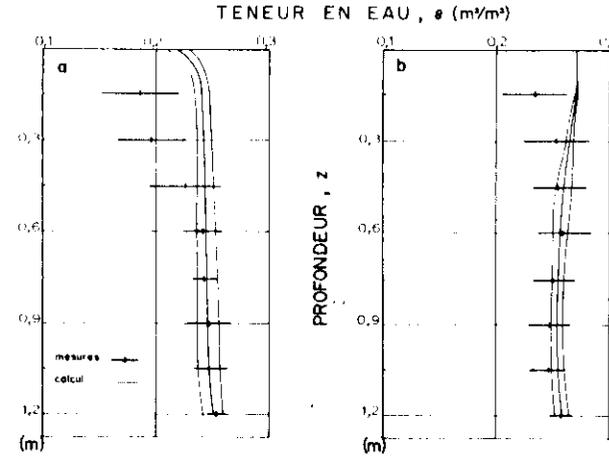


Fig. 10. Culture de maïs (19/7 26/7/84); profils hydriques moyens et écarts-types calculés et observés. (a) interlignes secs (six sites de mesures); (b) interlignes irrigués (huit sites de mesures).

Fig. 10. Maize crop (19/7 26/7/84); mean water content profiles and standard deviations calculated and observed. (a) dry rows (six measurement sites); (b) irrigated rows (eight measurement sites).

RÉSULTATS

Les résultats numériques et expérimentaux relatifs aux profils hydriques sont présentés sur les Figs. 9 et 10 pour le sorgho et le maïs respectivement. Les espérances mathématiques et les variances des profils ont été calculées avec $N = 60$ harmoniques pour la résolution de l'écoulement permanent dans chaque maille et les deux premiers moments [éqn. (15)] ont été estimés avec $M = 20$. Les valeurs moyennes et les variances expérimentales ont été obtenues sur les huit sites irrigués (Figs. 9b, 10b) correspondant au centre de la maille de calcul et les six sites secs (Figs. 9a, b) situés à sa frontière latérale.

Le Tableau 4 donne les intrants utilisés dans le modèle, les moyennes et les variances calculées de la demi-largeur x , de la tache humide à la surface et de l'atténuation capillaire η . Compte-tenu des observations effectuées sur l'uniformité spatiale du débit des goutteurs, la dose D_c est prise constante pour le sorgho et variable pour le maïs. Ces variations spatiales ont été ajustées empiriquement à celles observées sur les facteurs d'échelle. Contrairement au cas de la modélisation locale présentée précédemment, il n'est pas possible de déterminer, pour chaque maille de calcul, la valeur de η dans l'intervalle admissible η_1, η_2 par calage des observations. Cette détermination a été effectuée en imposant arbitrairement à $z_0 = 1,20$ m une condition U/U_0 constante en 1983 et variable en 1984. Les valeurs données Tableau 4 correspondent au meilleur calage des profils hydriques moyens numérique et expérimental.

L'accord est relativement bon entre les moyennes calculée et mesurée dans

TABLEAU 4

Modélisation stochastique à l'échelle de la parcelle: paramètres intrants (D_c , q_{cm} , U/U_0) et calculés

Périodes	Intrants		z	1,20 m	U/U_0	Résultats					
	Surface					x_1 (m)		η (m ⁻¹)		CR (mm, s ⁻¹)	
	D_c	q_{cm}				μ	σ^2	μ	$10^4 \sigma^2$	μ	$10^4 \sigma^2$
27/9-11/10/83 (sorgho)	D_c 2,6 mm s ⁻¹	q_{cm} 1,0 mm s ⁻¹			0,013	0,252	0,0257	0,016	2,66	2,52	4,2
19/7-26/7/84 (maïs)	D_c $D_c \left(1 - 0,17 \frac{(M-10)^2}{M} \right)$	q_{cm} 4,8 mm s ⁻¹			U/U_0 0,4 $\left(\frac{0,22}{a_m} \right)^{1,4}$	0,457	0,0372	0,0338	8,40	4,68	360
		q_{cm} 2,0 mm s ⁻¹									

l'interligne irrigué (Figs. 9b et 10b) à l'exception toutefois de $z = 0,15$ m pour le maïs (Fig. 10b). Par contre, des écarts appréciables apparaissent sur le premier quart du profil des sites secs (Figs. 9a et 10a).

Les variances de la teneur en eau calculées par le modèle sont nettement inférieures aux valeurs expérimentales.

Les causes principales de cette divergence peuvent être multiples: incertitude expérimentale due à l'étalonnage de l'humidimètre neutronique, restitution incomplète de la variabilité des caractéristiques hydrodynamiques de la parcelle par les facteurs d'échelle. De plus, la non uniformité des apports d'eau sur le maïs a engendré de fortes variations spatiales de l'humidité pas totalement prises en compte dans la modélisation. Cela se traduit également au niveau des variances de x_1 , η et CR (Tableau 4), plus élevées pour le maïs que pour le sorgho.

Le Tableau 5 compare pour le sorgho (sites secs et irrigués) les profils hydriques moyens expérimentaux et calculés comme moyenne stochastique $\bar{E}\{\theta\}$ et déterministe. Ces derniers correspondent à une simulation en prenant pour facteur d'échelle $a = 1$. Il apparaît que l'écoulement moyen stochastique

TABLEAU 5

Comparaison aux sites secs et irrigués entre les humidités moyennes mesurées $\bar{\theta}_{exp}$ et calculées; $\bar{E}\{\theta\}$ est la moyenne stochastique; $\theta_{a=1}$ est la moyenne déterministe

Sec								
z (m)	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20
$\bar{\theta}_{exp}$	0,214	0,244	0,238	0,242	0,238	0,240	0,240	0,242
$\bar{E}\{\theta\}$	0,237	0,240	0,240	0,239	0,238	0,238	0,239	0,241
$\theta_{a=1}$	0,236	0,240	0,241	0,240	0,239	0,238	0,239	0,241
σ_h/\bar{h}	0,35	0,40	0,46	0,49	0,47	0,42	0,41	0,44
Irrigué								
$\bar{\theta}_{exp}$	0,267	0,270	0,257	0,250	0,244	0,239	0,237	0,237
$\bar{E}\{\theta\}$	0,270	0,267	0,261	0,256	0,252	0,250	0,250	0,252
$\theta_{a=1}$	0,271	0,270	0,263	0,258	0,254	0,251	0,250	0,252
σ_h/\bar{h}	0,38	0,41	0,45	0,48	0,50	0,49	0,51	0,57

est très voisin de l'écoulement dans le sol dont les caractéristiques hydrodynamiques seraient les moyennes d'échelle $h^*(\theta)$ et $K^*(\theta)$.

Le contraste des fluctuations spatiales de teneur en eau et de pression conduit à poser:

$$h(X, a) = \frac{1}{a} \{h^*[\theta(X)] + \Delta\theta(X, a) \frac{dh^*}{d\theta}(\bar{\theta})\} \quad (16)$$

où $X = (x, z)$ est un point de la maille irriguée, et $\bar{\theta}$ est la valeur moyenne stochastique de θ en ce point.

Compte tenu de l'ordre de grandeur de $\Delta\theta dh^*/d\theta \approx 0,21$ m, ce terme est beaucoup plus faible que le premier, sauf à proximité de la tache mouillée. Aussi, en première approximation, il vient:

$$h(X, a) = \frac{1}{a} h^*(\theta) \quad (17)$$

La fluctuation de h dans cette expression est uniquement due au facteur a^{-1} , conduisant donc à un coefficient de variation pour $h(\sigma_h/h)$ constant sur la maille irriguée. Quelques résultats sont reportés dans le Tableau 5, pour lesquels CV varie de 0,35 à 0,57 avec une valeur moyenne voisine de 0,47 sur les sites irrigués et de 0,42 sur les sites secs, c'est à dire inférieure à $CV(a^{-1}) = 0,76$. Cela tend à montrer, dans le cadre des hypothèses de ce modèle, que les extractions racinaires uniformiseraient l'écoulement.

CONCLUSIONS

Cette étude avait pour objectif de comparer dans le cadre d'un essai de plein champ des modélisations de l'écoulement résultant d'une microirrigation avec des mesures de la teneur en eau par humidimétrie neutronique et de la pression par tensiométrie pendant deux campagnes agricoles. Certes, les difficultés inhérentes aux situations de terrain — non maîtrise des conditions expérimentales, instrumentation délicate (présence de racines près des tensiomètres), travaux agricoles à proximité des tubes d'accès neutronique, etc. — gâchent en partie la qualité des mesures mais c'est bien pour apprécier la représentativité des modélisations et non pas dans un but de validation que cet essai a été mis en place.

Une analyse texturale préliminaire a conduit à retenir la médiane granulométrique (D50) comme indicateur de la variabilité spatiale.

Quatorze sites équipés d'un tube d'accès pour humidimètre neutronique et tensiomètres ont été sélectionnés de façon à représenter le plus fidèlement possible la distribution log-normale de ce paramètre.

Un essai de drainage interne a permis de déterminer en un site la relation entre la conductivité hydraulique et la pression convenablement représentée par une fonction exponentielle.

L'étude de la variabilité spatiale des propriétés hydrodynamiques du sol a porté sur les courbes de rétention mesurées in-situ pendant une campagne

agricole. Les résultats ont été analysés par la théorie de mise en facteurs d'échelle et étendus à la conductivité hydraulique en admettant le concept de similitude des milieux poreux.

Les mesures de teneur en eau effectuées en un site lors des périodes retenues au cours des deux campagnes agricoles conduisent à retenir l'hypothèse d'un régime quasi-permanent. Le modèle d'écoulement permanent présenté dans la première partie de cet article avec une fonction d'extraction racinaire très simple obtenue par calage, restitue correctement les mesures sur ce site et dans la zone située sous le goutteur et plus médiocrement dans la zone la plus sèche.

L'approche stochastique conceptuelle concorde relativement bien avec les mesures des moyennes de la teneur en eau lors de deux périodes à l'exception toutefois des zones proches de la surface et éloignées des goutteurs. Par contre, les variances calculées avec le modèle sont nettement inférieures aux variances expérimentales. Ces dernières sont faibles et tendraient à démontrer que l'approche déterministe pour la teneur en eau sur cette parcelle n'est pas, compte-tenu de la précision des mesures, à rejeter. Cette situation peut résulter du caractère argileux du sol qui se traduit par des capacités capillaires faibles dans la gamme de teneur en eau explorée. Inversement, les variances de la pression sont très élevées avec des coefficients de variation de l'ordre de 50%.

Avec les réserves que la prudence impose lors de la généralisation de résultats obtenus sur une parcelle, avec des cultures et des conditions climatiques particulières, la relative concordance de l'expérience et des modèles envisagés conduisent aux conclusions pratiques suivantes. Le modèle déterministe d'écoulement microirrigué présenté dans Partie I constitue une base viable pour le dimensionnement des réseaux de microirrigation par des lignes de goutteurs rapprochés. Il permet notamment de prédire la répartition de l'humidité au droit d'un goutteur à la condition toutefois que la répartition de l'extraction racinaire dans la maille irriguée soit connue. D'autre part en ce qui concerne le pilotage de l'irrigation, il semble que l'existence de sites représentatifs du bilan hydrique moyen soit plausible dans le cas de l'écoulement microirrigué mais par contre la fiabilité d'une seule ou de quelques mesures tensiométriques pour estimer un "comportement" représentatif de la parcelle est plus que douteuse. A l'inverse, on peut imaginer que les "comportements" extrêmes pourraient être bien représentés par les évolutions de la pression en des sites judicieusement choisis à partir de la variabilité des caractéristiques du sol, hypothèse que critiqueront peut-être de nouvelles expérimentations.

REMERCIEMENTS

L'expérimentation a été réalisée au CEMAGREF d'Aix en Provence en collaboration avec la division Irrigation. Nos collègues sont remerciés pour l'aide efficace apportée.

ANNEXE

Supposons que chaque courbe de rétention $h_l(\theta) = h_{0l}(\theta/\theta_{sat})^p$ obtenue en tout point l , ($1 \leq l \leq 17$) à partir de n_l couples (h_{lk}, θ_{lk}) avec $1 \leq k \leq n_l$, puisse se déduire d'une courbe moyenne d'échelle $h^*(\theta) = h_0^*(\theta/\theta_{sat})^p$ par la relation:

$$h_l(\theta) = \frac{h^*(\theta)}{a_l} = \frac{h_0^*}{a_l} \left(\frac{\theta}{\theta_{sat}} \right)^p \quad (A1)$$

où a_l est le facteur d'échelle caractérisant le point l . Le problème revient à chercher les paramètres h_0^* , p et a_l .

La minimisation du critère:

$$M = \sum_{l=1}^{17} \sum_{k=1}^{n_l} (\mu_{lk} - p\lambda_{lk} - b_l)^2 \quad (A2)$$

avec:

$$\mu_{lk} = \ln(\cdot h_{lk}), \quad \lambda_{lk} = \ln\left(\frac{\theta_{lk}}{\theta_{sat}}\right), \quad b_l = \ln\left(\frac{h_0^*}{a_l}\right)$$

conduit au système linéaire suivant:

$$p \sum_{l=1}^{17} \sum_{k=1}^{n_l} \lambda_{lk}^2 - \sum_{l=1}^{17} \sum_{k=1}^{n_l} \mu_{lk} \lambda_{lk} - \sum_{l=1}^{17} \sum_{k=1}^{n_l} b_l \lambda_{lk} = \frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l} (\mu_{lk} - p\lambda_{lk}) \quad (A3)$$

dont la résolution fournit:

$$p = \frac{\sum_{l=1}^{17} \sum_{k=1}^{n_l} \mu_{lk} \lambda_{lk} - \frac{1}{n_l} \left(\sum_{k=1}^{n_l} \mu_{lk} \right) \left(\sum_{k=1}^{n_l} \lambda_{lk} \right)}{\sum_{l=1}^{17} \left(\sum_{k=1}^{n_l} \lambda_{lk}^2 - \frac{1}{n_l} \left(\sum_{k=1}^{n_l} \lambda_{lk} \right)^2 \right)}$$

et les paramètres b_l .

L'expression de définition des b_l (éqn. A2) jointe à la condition de normalisation des facteurs d'échelle suivante:

$$\frac{1}{17} \sum_{l=1}^{17} a_l = 1 \quad (A4)$$

permet de calculer h_0^* par:

$$\frac{h_0^*}{17} \sum_{l=1}^{17} \exp(-b_l) = 1 \quad (A5)$$

et les facteurs d'échelle:

$$a_l = \frac{h_0^*}{a_l} \exp(-b_l) \quad (A6)$$

RÉFÉRENCES

- Batu, V., 1977. Steady infiltration from a ditch: theory and experiment. Soil Sci. Soc. Am., J., 41: 677-681.
- Boulier, J.F., 1985. Modélisation stochastique de l'infiltration en milieux poreux non uniformes. Application à une parcelle microirriguée. Thèse, Univ. Grenoble, 249 pp.
- Boulier, J.F. et Vauclin, M., 1984. Stochastic simulation of water flows in unsaturated soil. Comparison with observed values. Proc. RIZA, Symp., München, 1: 315-330.

- Bouhier, J.F. et Vauchin, M., 1987. Régimes permanents bidimensionnels d'infiltration dans un sol cultivé et microirrigué: I. Théorie. *J. Hydrol.* 00: 00 00 (cette volume).
- Bresler, E. et Dagan, G., 1983. Unsaturated flow in spatially variable fields: 2. Application of water flow models to various fields. *Water Resour. Res.*, 19: 421 428.
- Müller, E.E. et Müller, R.D., 1958. Physical theory for capillary flow phenomena. *J. Appl. Phys.*, 27: 324 332.
- Nielsen, D.R., Biggar, J.W. et Erh K.T., 1973. Spatial variability of field-measured soil-water properties. *Hilgardia*, 42: 15 260.
- Peck, A.J., Luxmoore, R.J. et Stolzy J.L., 1977. Effects of spatial variability of soil hydraulic properties in water budget modeling. *Water Resour. Res.*, 13: 348 354.
- Russo, D., 1983. A geostatistical approach to the trickle irrigation design in heterogeneous soil: I. Theory. *Water Resour. Res.*, 19: 632 642.
- Russo, D., 1984a. Statistical analysis of crop yield soil water relationships in heterogeneous soil under trickle irrigation. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 48: 1402 1410.
- Russo, D., 1984b. A geostatistical approach to the trickle irrigation design in a heterogeneous soil: II. A field test. *Water Resour. Res.*, 20: 543 552.
- Russo, D. et Bresler, E., 1982. A univariate versus multivariate parameter distribution in a stochastic conceptual analysis of unsaturated flow. *Water Resour. Res.*, 18: 483 488.
- Saddig, M.M., Wierenga, P.J., Hendricks, J.M.H. et Hussain, M.Y., 1985. Spatial variability of soil water tension in an irrigated soil. *Soil Sci.*, 140(2): 126 132.
- Sharma, M.L., Gander, G.A. et Hunt, C.G. 1980. Spatial variability of infiltration in a watershed. *J. Hydrol.*, 45: 101 122.
- Thomas, A., Duke, H.R., Zachmann, A.W. et Kruse, E.G., 1976. Comparisons of calculated and measured capillary potentials from line-sources. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 40: 10 15.
- Vauchin, M., Imbernon, J., Vachaud, G. et Dancette, C., 1983. Description expérimentale et modélisation stochastique des transferts par mise en facteur d'échelle des propriétés hydrodynamiques des sols. *Colloq. Int. Emploi Radio Isot. Agric.*, Aix en Provence, IAEA, SM 267/21: 103 124.
- Warrick, A.W., Mullen, G.J. et Nielsen, D.R., 1977a. Scaling field measured soil hydraulic properties using a similar media concept. *Water Resour. Res.*, 13: 355 362.
- Warrick, A.W., Mullen, G.J. et Nielsen, D.R., 1977b. Prediction of the soil water flux based upon field-measured soil-water properties. *Soil Sci. Soc. Am.*, J., 41: 14 19.