



SMR/534-4

ICTP/WMO WORKSHOP ON EXTRA-TROPICAL AND TROPICAL
LIMITED AREA MODELLING
22 October - 3 November 1990

"Fonctions sphériques
Applications a la météorologie"

by

M. Rochas

Presented by:
Prof. S. TIBALDI
Institute of Physics
Univ. of Bologna
Bologna, Italy

Please note: These are preliminary notes intended for internal distribution only.

MINISTÈRE DES TRANSPORTS
SECRETARIAT GÉNÉRAL A L'AVIATION CIVILE

DIRECTION DE LA MÉTÉOROLOGIE NATIONALE

NOTES INTERNES
de
L'ÉTABLISSEMENT D'ÉTUDES
ET DE RECHERCHES MÉTÉOROLOGIQUES

N° 323

FONCTIONS SPHERIQUES
APPLICATIONS A LA METEOROLOGIE
par
M. ROCHAS

AVRIL 1973

RESUME

Cette note présente un ensemble de résultats plus ou moins classiques sur les fonctions sphériques. On y expose quelques méthodes numériques qui ont récemment été appliquées en météorologie dynamique.

SUMMARY

This note present more and less classical results on spherical functions. Several numerical methods recently applied in dynamical meteorology are exposed here.

INTRODUCTION

Cette note ne présente aucun résultat nouveau, c'est simplement un document de travail dans lequel ont été rassemblés différents résultats plus ou moins classiques. Il s'est avéré nécessaire de l'écrire pour ne pas avoir à répéter, chaque fois que l'on aborde les méthodes spectrales, un ensemble de propriétés, de définitions et de notations.

Dans une première partie on donne certaines définitions relatives aux fonctions sphériques et on rappelle quelques-unes de leurs propriétés mathématiques.

La deuxième partie aborde le problème de la représentation des champs scalaires en série de fonctions sphériques.

Dans la troisième partie sont abordés les problèmes numériques liés à la résolution spectrale d'équations linéaires et non linéaires. On y expose notamment le principe des techniques actuelles de la méthode spectrale qui sont sensiblement différentes de celles qui étaient utilisées il y a deux ans seulement.

Les notations suivantes seront adoptées :

$$(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$$

- θ Latitude
- λ Longitude
- $\mu = \sin \theta$
- P_n^m Fonction associée de LEGENDRE de première espèce de degré n et d'ordre m .
- Y_n^m Fonction sphérique de degré n et d'ordre m .
- P_n Polynôme de LEGENDRE de degré n .
- Δ Opérateur LAPLACIEN
- $(\bar{\cdot})$ Complexe conjugué de (\cdot)
- δ_n^m Symbole de KRONECKER.

I - FONCTIONS SPHERIQUES

Définitions

On appelle harmonique sphérique de degré n , une fonction homogène, $u(x, y, z)$ de degré n , qui vérifie l'équation de LAPLACE :

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

Cette expression (Spherical Harmonic) a été introduite par Lord KELVIN. Une harmonique sphérique est donc une solution commune aux deux équations aux dérivées partielles :

$$\Delta u = 0$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = n u$$

En coordonnées sphériques la seconde équation s'écrit simplement :

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = n u$$

d'où il résulte :

$$u(r, \lambda, \theta) = r^n S_n(\lambda, \theta)$$

S_n étant une fonction arbitraire de λ et θ .

Si l'on reporte dans l'équation de LAPLACE (1) :

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial S_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \lambda^2} + n(n+1) S_n = 0 \quad (2)$$

Toute fonction $S_n(\lambda, \theta)$ qui vérifie (2) est appelée fonction sphérique, ou fonction de LAPLACE, ou harmonique sphérique superficielle de degré n .

Souvent en géophysique les expressions harmonique sphérique et fonction sphérique sont utilisées comme synonymes, toutefois dans la littérature anglo-saxonne on trouve parfois le terme "Surface spherical harmonic".

On peut trouver des solutions de (2) par la méthode de séparation des variables; on posera :

$$S_n(\lambda, \theta) = A(\theta) \times B(\lambda)$$

(2) devient :

$$\frac{B(\lambda)}{\cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{dA}{d\theta} \right) + \frac{A(\theta)}{\cos^2 \theta} \frac{d^2 B}{d\lambda^2} + n(n+1) AB = 0$$

Considérée comme une équation en λ , cette équation a pour solution les fonctions circulaires; si l'on pose :

$$B(\lambda) = \beta e^{im\lambda}$$

on obtient pour A :

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{dA}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} \right] A = 0$$

qui est l'équation de LEGENDRE.

Si l'on pose $\mu = \sin \theta$, on a :

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dA}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] A = 0 \quad (3)$$

Les solutions intéressantes de cette équation sont celles pour lesquelles n et $|m|$ sont entiers, et positifs.

Sur l'intervalle $[-1, +1]$ on obtient les fonctions associées de LEGENDRE de première espèce $P_n^m(\mu)$.

Pour la résolution de (3) nous renvoyons à L. ROBIN (1957).

Fonctions associées de LEGENDRE de première espèce

Il existe plusieurs expressions analytiques des fonctions associées de LEGENDRE de première espèce, les plus classiques sont :

a - La formule de RODRIGUES :

$$P_n^m(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (1 - \mu^2)^n \quad (4)$$

b - La définition de FERRERS :

$$T_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \quad m > 0 \quad (5)$$

où $P_n(\cos \theta)$ désigne le polynôme de LEGENDRE de degré n .

En pratique ces définitions ne sont pas commodes pour les applications; en particulier contrairement à un usage assez répandu qui veut que (cf. L. ROBIN):

$$P_n^m(\mu) \equiv (-1)^{|m|} P_n^m(\mu)$$

nous poserons :

$$P_n^m(\mu) \equiv P_n^{-m}(\mu) \quad (6)$$

D'après les deux définitions (4) et (5) on voit que :

$$P_n^m(\mu) \equiv 0 \quad \text{si} \quad |m| > n \quad (7)$$

(6) et (7) permettent alors de n'étudier que les cas :

$$\begin{cases} m > 0 \\ n > |m| \end{cases}$$

La définition de FERRERS (5) permet en outre de mettre $P_n^m(\mu)$ sous la forme :

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} Q_{n-|m|}(\mu)$$

où $Q_{n-|m|}(\mu)$ est un polynôme de degré $n-|m|$ et de la parité de $n-|m|$. Cette propriété est souvent utilisée dans les applications et sera exploitée par la suite.

On peut exprimer analytiquement le polynôme Q ; ce qui permet de calculer pratiquement les valeurs numériques des P_n^m (on supposera $m \geq 0$ pour alléger les notations):

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{(2n-1)!!}{(n-m)!} \mu^{n-m} - \frac{(2n-3)!!}{2(n-m-2)!} \mu^{n-m-2} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^p \frac{(2n-2p-1)!!}{2^p p! (n-m-2p)!} \mu^{n-m-2p} + \dots \right. \\ \left. + \left((-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{(n+m-1)!!}{2^{\frac{n-m}{2}} \frac{n-m}{2}!} \right) \right] \\ + \left((-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \frac{(n+m)!!}{2^{\frac{n-m-1}{2}} \frac{n-m-1}{2}!} \mu \right)$$

A l'aide de l'équation de LEGENDRE (3) on peut trouver des formules de récurrence permettant d'exprimer $P_n^m(\mu)$ en fonction d'autres fonctions associées de LEGENDRE, nous en donnons quelques exemples ci-dessous :

$$\sqrt{1-\mu^2} P_n^{m+1} \equiv (n-m) \mu P_n^m - (n+m) P_{n-1}^m \rightarrow \text{OK}$$

$$(2n+1) \sqrt{1-\mu^2} P_n^m \equiv P_{n-1}^{m+1} - P_{n+1}^{m+1} \quad \text{OK}^2$$

$$(n-m+2) P_{n+2}^m + \sqrt{1-\mu^2} (2n+3) \mu P_{n+1}^m + (n+m+1) P_n^m \equiv 0 \rightarrow \text{OK}$$

$$P_{n+2}^m + \frac{2(m+1)\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_{n+1}^m + (n-m)(n+m+1) P_n^m \equiv 0 \quad \text{OK}$$

En écrivant l'équation de LEGENDRE pour deux P_n^m de même ordre m on obtient aisément :

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \left[P_n^m \frac{dP_{n'}^m}{d\mu} - P_{n'}^m \frac{dP_n^m}{d\mu} \right] \right\} + (n - n') (n + n' + 1) P_n^m P_{n'}^m = 0$$

soit en intégrant sur $[-1, +1]$:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m P_{n'}^m d\mu = 0 \quad n \neq n' \quad (8)$$

en faisant de même pour deux P_n^m de même degré n :

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m P_n^{m'} \frac{d\mu}{1 - \mu^2} = 0 \quad m \neq m'$$

Lorsque $n = n'$ on obtient :

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m]^2 d\mu = \frac{2}{2n + 1} \frac{(n + m)!}{(n - m)!} \quad (9)$$

Lorsque $m = m'$:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m]^2 \frac{d\mu}{1 - \mu^2} = \frac{1}{m} \frac{(n + m)!}{(n - m)!}$$

Propriétés des fonctions sphériques

Nous poserons :

$$Y_n^m = P_n^m e^{im\lambda} \quad (10)$$

Les fonctions sphériques possèdent deux propriétés importantes :

1 - Ce sont les fonctions propres de l'opérateur Laplacien sur la Sphère S (de rayon r) :

$$\Delta Y_n^m = -\frac{n(n+1)}{r^2} Y_n^m$$

d'après l'équation de LEGENDRE (2).

2 - Elles sont orthogonales deux à deux :

$$\iint_S Y_n^m \overline{Y_{n'}^{m'}} d\lambda d\mu = 0 \quad \text{pour } \begin{cases} n \neq n' \\ m \neq m' \end{cases}$$

d'après (8) et l'orthogonalité des fonctions circulaires.

En fait, nous anticiperons sur la suite et modifierons la définition (10) de façon à avoir :

$$\iint_S Y_n^m \overline{Y_{n'}^{m'}} d\lambda d\mu = \delta_n^{n'} \delta_n^{m'}$$

On peut montrer aussi, et c'est là leur propriété fondamentale, qu'elles forment une base de l'espace des fonctions de carré sommable sur la sphère.

C'est-à-dire que si $F(\lambda, \mu) \in L^2(S)$ on peut écrire :

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=|m|}^{+\infty} F_n^m Y_n^m \quad (11)$$

où les F_n^m sont les coefficients de LAPLACE de la décomposition, définis par :

$$F_n^m = \frac{1}{4\pi} \iint_S F(\lambda, \mu) \overline{Y_n^m} d\lambda d\mu$$

Et l'on a :

$$\iint_S F^2 d\lambda d\mu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=|m|}^{+\infty} F_n^m \overline{F_n^m}$$

Pour la convergence de la série (11) on pourra voir E.W. HOBSON [1931].

II - REPRESENTATION D'UN CHAMP SCALAIRE

Troncature

Etant donné un champ météorologique $\Phi(\lambda, \mu)$, il est possible de le représenter sous la forme de sa série de LAPLACE (11), mais cette possibilité est

théorique. En pratique nous nous limiterons à des développements tronqués de la forme:

$$\Phi(\lambda, \mu) = \sum_{\mathcal{C}} \Phi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu)$$

où \mathcal{C} est un sous-ensemble fini de $N \times Z$, que nous appellerons troncature, tel que:

$$(n, m) \in \mathcal{C} \Rightarrow n \geq m$$

En outre les champs que nous considérerons sont réels ce qui, d'après:

$$Y_n^{-m} = \overline{Y_n^m}$$

entraîne:

$$(n, m) \in \mathcal{C} \Rightarrow (n, -m) \in \mathcal{C}$$

et

$$\Phi_n^{-m} = \overline{\Phi_n^m}$$

ce qui permet de ne considérer que les coefficients Φ_n^m tels que $m \geq 0$, les autres s'en déduisant par conjugaison.

En pratique nous utiliserons des troncatures simples, par exemple:

$$1 - \mathcal{C} = \{(n, m); 0 < n - |m| < J, |m| < M\}$$

que nous appellerons troncature trapézoïdale, elle est représentée sur la figure 1a.

$$2 - \mathcal{C} = \{(n, m); 0 < |m| < n < N\}$$

que nous appellerons troncature triangulaire et qui est représentée sur la figure 1b.

Représentation réelle

Dans certaines applications, au lieu du développement

$$\Phi = \sum_{\mathcal{C}} \Phi_n^m Y_n^m$$

on utilisera la représentation équivalente :

$$\Phi = \sum_{\mathcal{C}'} (A_n^m \cos m \lambda + B_n^m \sin m \lambda) P_n^m(\mu)$$

où \mathcal{C}' désigne la partie de \mathcal{C} pour laquelle $m \geq 0$.

On passe des A_n^m et B_n^m aux Φ_n^m simplement en écrivant que :

$$\Phi_n^m e^{im\lambda} + \Phi_n^{-m} e^{-im\lambda} = A_n^m \cos m \lambda + B_n^m \sin m \lambda$$

d'où d'après les formules d'EULER :

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\begin{aligned} A_n^m &= \Phi_n^m + \Phi_n^{-m} = 2 \operatorname{Re}(\Phi_n^m) \\ B_n^m &= \frac{1}{i}(\Phi_n^m - \Phi_n^{-m}) = -2 \operatorname{Im}(\Phi_n^m) \end{aligned}$$

où $\operatorname{Re}()$ désigne la partie réelle et $\operatorname{Im}()$ désigne la partie complexe :

$$\Phi_n^m = \frac{1}{2} (A_n^m - i B_n^m)$$

Normes

Dans les applications il est important d'utiliser des fonctions normées, ainsi que nous l'avons fait en parlant des propriétés des fonctions sphériques, de façon à avoir :

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S Y_n^m \overline{Y_n^m} d\lambda d\mu = 1$$

L'utilisation de la représentation réelle des champs nous conduit toutefois à une autre norme.

1 - Représentation complexe

Avec les notations classiques on sait que :

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S Y_n^m \overline{Y_n^m} d\lambda d\mu = \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

(d'après la formule (9)).

Dans les problèmes où nous utiliserons la représentation complexe, nous modifierons la définition des P_n^m et nous poserons (d'après G. DADY [1969]) :

$$\tilde{P}_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m$$

Toutefois le symbole \approx sera fréquemment omis et l'on utilisera la notation P_n^m pour \tilde{P}_n^m .

2 - Représentation réelle

On veut que :

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \tilde{P}_n^m{}^2 (a \cos m\lambda + b \sin m\lambda)^2 d\lambda d\mu = a^2 + b^2$$

qui donne (cf G. DADY [1969]) :

$$\tilde{P}_n^m = \sqrt{\epsilon} \tilde{P}_n^m$$

où

$$\epsilon = 1 \text{ pour } m = 0$$

$$\epsilon = 2 \text{ pour } m \neq 0$$

De même on écrira P_n^m au lieu de \tilde{P}_n^m en pratique.

Ces abus de notation ne prêtent toutefois pas à confusion car on n'utilisera jamais simultanément les représentations réelles et complexes. En effet dans les modèles on utilisera toujours la notation complexe, pour l'analyse la notation réelle.

Le changement de norme complique les formules données au paragraphe précédent, en effet il faut écrire maintenant :

$$\Phi_n^m \tilde{P}_n^m e^{im\lambda} + \overline{\Phi_n^m} \tilde{P}_n^m e^{-im\lambda} = \tilde{P}_n^m (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda)$$

d'où :

$$A_n^m = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\Phi_n^m + \Phi_n^{-m}) = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} R_e (\Phi_n^m)$$

$$B_n^m = \frac{1}{i\sqrt{\epsilon}} (\Phi_n^m - \Phi_n^{-m}) = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} C_m (\Phi_n^m)$$

et :

$$\Phi_n^m = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} (A_n^m + i B_n^m)$$

Dans la suite de cette note il ne sera plus parlé de représentation réelle, et les notations P_n^m et Y_n^m désigneront respectivement \tilde{P}_n^m et $\tilde{P}_n^m e^{im\lambda}$, nous utiliserons toujours les fonctions normées! Nous allons maintenant passer à l'utilisation pour la météorologie des résultats précédents.

REPRESENTATION D'UN CHAMP HEMISPHERIQUE

Très souvent, en météorologie, on est amené à n'utiliser que des champs hémisphériques, étant donné le peu d'information disponible dans l'hémisphère Sud et aussi parce qu'il est plus économique en temps de calcul de se limiter à une partie de la sphère.

Nous nous servirons ici de la parité des fonctions associées de LEGENDRE. Nous avons vu que :

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} Q_{n-|m|}(\mu)$$

où $Q_{n-|m|}$ est un polynôme de degré $n - |m|$ et de la parité de $n - |m|$. Il est facile de voir que les fonctions sphériques paires, c'est-à-dire telles que $n - |m|$ soit pair, forment une base des fonctions de carré sommable sur un hémisphère HS. L'équivalent de :

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S Y_n^m \overline{Y_n^{m'}} d\lambda d\mu = \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}$$

devient alors :

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{HS} Y_n^m \overline{Y_n^{m'}} d\lambda d\mu = \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}$$

sans que l'on ait besoin de changer la norme.

De même les fonctions sphériques impaires (à cela près qu'il faut rajouter la fonction constante Y_0^0).

C'est ainsi que nous représenterons le géopotentiel d'une surface isobare sur l'hémisphère Nord par une série de fonctions sphériques symétriques (seul H. W. ELLSAESSER [1966 b] a utilisé un développement antisymétrique), ce choix fait, les autres s'en déduisent par simple examen des équations d'évolution :

U sera développé en série de LAPLACE paire,
 V " " " " impaire, etc . . .

Sur la figure 2 sont donnés deux exemples de troncatures triangulaires, l'une paire, l'autre impaire.

III - APPLICATION A LA RESOLUTION SPECTRALE DES EQUATIONS

Opérations linéaires sur les fonctions sphériques

Dans les équations que l'on considère en météorologie dynamique un certain nombre d'opérateurs linéaires apparaissent, qui sont particulièrement simples à traiter par la méthode spectrale, ce sont :

$$\Delta(\cdot), \frac{\partial}{\partial \lambda}(\cdot), (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu}(\cdot), \mu(\cdot)$$

Avec la formulation complexe on aura :

$\Delta Y_n^m = -n(n+1) Y_n^m$ $\frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} = im Y_n^m$

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial Y_n^m}{\partial \mu} - (n+1) D_n^m Y_{n-1}^m - n D_{n+1}^m Y_{n+1}^m$$

$$\mu Y_n^m - D_n^m Y_{n-1}^m + D_{n+1}^m Y_{n+1}^m$$

où

$$D_n^m = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}}$$

Ces formules sont toujours valables, étant entendu que les termes aberrants ($n < 0$ ou $m > n$) qui éventuellement apparaîtraient doivent être considérés comme nuls.

On peut citer comme exemple d'équation, l'équation de balance linéarisée, qui a été traitée par E. ELIASSEN et B. MACHENHAUER [1965], P. E. MERILEES [1968] et M. ROCHAS [1971].

Opérations non linéaires sur les fonctions sphériques

Les termes non linéaires des équations d'évolution présentent certaines difficultés, nous nous contenterons d'étudier les propriétés essentielles. Nous considérerons un opérateur bilinéaire L , et deux fonctions :

$$B = \sum_{\mathcal{C}_1} B_n^m Y_n^m$$

$$C = \sum_{\mathcal{C}_2} C_n^m Y_n^m$$

et nous cherchons la décomposition en série de LAPLACE de :

$$A = L(B, C)$$

On va se servir de la linéarité de L par rapport à B et C :

$$A = L(B, C) = L\left(\sum_{\mathcal{C}_1} B_{n_1}^{m_1} Y_{n_1}^{m_1}, \sum_{\mathcal{C}_2} C_{n_2}^{m_2} Y_{n_2}^{m_2}\right)$$

$$= \sum_{\mathcal{C}_1} \sum_{\mathcal{C}_2} B_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} L\left(Y_{n_1}^{m_1}, Y_{n_2}^{m_2}\right)$$

En multipliant les deux membres par Y_n^m et en intégrant sur la sphère on a :

$$A_n^m = \sum_{\mathcal{C}_1} \sum_{\mathcal{C}_2} B_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \iint_S L(Y_{n_1}^{m_1}, Y_{n_2}^{m_2}) \overline{Y_n^m} d\lambda d\mu$$

On ramène alors le calcul de A au calcul des coefficients :

$$l_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m} = \iint_S L(Y_{n_1}^{m_1}, Y_{n_2}^{m_2}) \overline{Y_n^m} d\lambda d\mu$$

Et l'on peut écrire :

$$A = \sum_{\mathcal{C}_0} l_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m} Y_n^m \times B_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2}$$

Le point essentiel est de démontrer que \mathcal{C}_0 est un ensemble fini, c'est-à-dire que le nombre des coefficients l non nuls est fini.

En pratique, les termes bilinéaires que nous rencontrerons seront toujours des produits de deux termes linéaires du type de ceux considérés au paragraphe précédent, ce qui nous permet de ne considérer que le cas du produit de deux fonctions, c'est-à-dire le cas :

$$L(A, B) = A \cdot B$$

Dans ce cas il est facile de montrer que \mathcal{C}_0 est fini.

Produits de deux fonctions sphériques

Nous allons d'abord étudier la répartition spectrale de :

$$A = Y_{n_1}^{m_1} Y_{n_2}^{m_2}$$

Par définition :

$$Y_{n_1}^{m_1} Y_{n_2}^{m_2} = P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} e^{i(m_1 + m_2)\lambda}$$

c'est-à-dire que le produit de deux fonctions sphériques d'ordre m_1 et m_2 respectivement donne une somme de fonctions sphériques d'ordre $(m_1 + m_2)$.

En effet :

$$A_n^m = \frac{1}{4\pi} \iint_S Y_{n_1}^{m_1} Y_{n_2}^{m_2} \overline{Y_n^m} d\lambda d\mu$$

Si l'on intègre par rapport à λ on voit que tous les A_n^m sont nuls sauf ceux pour lesquels :

$$m = m_1 + m_2$$

il reste à évaluer :

$$A_n^{m_1+m_2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^{m_1+m_2} d\mu$$

Pour cela nous allons écrire :

$$P_n^m = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} Q_{n-|m|}$$

où Q est un polynôme de degré $n - |m|$ et de la parité de $n - |m|$. Alors :

$$P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} = (1 - \mu^2)^{\frac{|m_1|+|m_2|}{2}} Q_{n_1-|m_1|} Q_{n_2-|m_2|}$$

Et l'on veut le mettre sous la forme :

$$P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} = (1 - \mu^2)^{\frac{|m_1+m_2|}{2}} R(\mu)$$

le problème étant de déterminer le degré de R .

On est amené à considérer deux cas :

$$a. m_1 m_2 > 0$$

dans ce cas : $|m_1| + |m_2| = |m_1 + m_2|$ et

$$(1 - \mu^2)^{\frac{|m_1|+|m_2|}{2}} Q_{n_1-|m_1|} Q_{n_2-|m_2|} = (1 - \mu^2)^{\frac{|m_1+m_2|}{2}} Q_{n_1+n_2-|m_1+m_2|}$$

c'est-à-dire que :

$$d^*(R) = n_1 + n_2 - |m_1 + m_2|$$

$$b \cdot m_1 m_2 < 0$$

Sans restreindre la généralité du problème on peut supposer que:

$$|m_1| \geq |m_2|$$

alors

$$|m_1| + |m_2| = |m_1 + m_2| + 2|m_2|$$

et

$$(1 - \mu^2)^{\frac{|m_1| + |m_2|}{2}} Q_{n_1 - |m_1|} Q_{n_2 - |m_2|} =$$

$$(1 - \mu^2)^{\frac{|m_1 + m_2|}{2}} (1 - \mu^2)^{|m_2|} Q_{n_1 - |m_1|} Q_{n_2 - |m_2|}$$

et alors :

$$\begin{aligned} d^*(R) &= 2|m_2| + n_1 + n_2 - (|m_1| + |m_2|) \\ &= n_1 + n_2 - |m_1 + m_2| \\ &= n_1 + n_2 - |m| \end{aligned} \tag{12}$$

C'est-à-dire que dans les deux cas on peut écrire :

$$Y_{n_1}^{m_1} Y_{n_2}^{m_2} = \sum_{n = |m_1 + m_2|}^{n_1 + n_2 - |m_1 + m_2|} A_n^{m_1 + m_2} Y_n^{m_1 + m_2}$$

les coefficients A_n^m étant donnés par :

$$A_n^{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^{m_1 + m_2} d\mu$$

Ces intégrales sont calculables analytiquement, cf J. SILBERMAN [1954].

... / ...

Troncature produit

Etant donné deux fonctions définies par :

$$B = \sum_{\mathcal{C}_1} B_n^m Y_n^m$$

$$C = \sum_{\mathcal{C}_2} C_n^m Y_n^m$$

où \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 désignent les ensembles de couples (n, m) pour lesquels B_n^m et C_n^m respectivement ne sont pas nuls, nous appellerons $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ troncature produit des troncatures \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , l'ensemble des couples (n, m) pour lesquels les A_n^m définis par :

$$A = BC = \sum_{\mathcal{C}'} A_n^m Y_n^m$$

ne sont pas nuls.

Dans les applications nous aurons toujours :

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$$

Nous allons déterminer \mathcal{C} dans deux cas :

1 - Troncature trapézoïdale

$$\mathcal{C} = \left\{ (n, m); |m| < M, 0 \leq n - |m| < J \right\}$$

En partant de la formule (12) nous avons :

$$Y_{n_1}^{m_1} Y_{n_2}^{m_2} = e^{i(m_1 + m_2)\lambda} (1 - \mu^2)^{\frac{|m_1 + m_2|}{2}} R(\mu)$$

avec $d \cdot R = n_1 + n_2 - |m_1 + m_2|$.

En posant $m = m_1 + m_2$ nous allons voir la forme de \mathcal{C}'

Nous considérerons deux cas :

a) $|m| > M$ alors $|m| = |m_1| + |m_2|$

et $n_1 + n_2 - |m| \leq |m_1| + J + |m_2| + J - |m| = 2J$

donc : $d^{\circ} R \leq 2 J$ (12')

l'égalité pouvant se produire.

b) $|m| < M$

Deux cas peuvent se produire :

- $m_1, m_2 > 0$ alors $|m| = |m_1| + |m_2|$ et l'on se retrouve dans le cas précédent;

- $m_1, m_2 < 0$, nous supposons $m_1 < 0$ pour la simplicité de l'exposé :

$$|m| = |m_2| - |m_1|$$

d'où :

$$n_1 + n_2 - |m| \leq |m_1| + J + |m_2| + J - |m| = 2 J + 2 m_2 - 2 |m|$$

et

$$d^{\circ} R \leq 2 (M + J) - 2 |m| \quad (12'')$$

ce qui donne la forme de \mathcal{F}' représentée sur la figure 3.

2 - Troncature triangulaire

$$\mathcal{F} = \left\{ (n, m); 0 \leq |m| \leq n \leq N \right\}$$

on peut refaire le même calcul, on trouve dans tous les cas :

$$d^{\circ} R \leq 2 N - |m|$$

et la forme de \mathcal{F}' est représentée sur la figure 4.

Nous avons donc mis le produit :

$$A = B C$$

sous la forme :

$$A_n^m = \sum_{\mathcal{F}_1} \sum_{\mathcal{F}_2} B_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} I_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$$

$$A = \sum_{\mathcal{F}} A_n^m Y_n^m$$

.../...

En pratique connaissant B et C sous la forme de leur développement en fonctions sphériques pour obtenir A, il est nécessaire de calculer les coefficients I, ce qui représente un volume considérable de calculs. En effet si :

$$\text{Card}(\mathcal{T}_1) = \text{Card}(\mathcal{T}_2) = J$$

alors : $\text{Card}(\mathcal{T}') > J^2$

H. W. ELLSAESSER [1966a] a évalué le Card (\mathcal{T}'), nous renvoyons à son article ou à S. A. ORSZAG [1970] pour plus de détails.

En pratique cette méthode n'est plus employée, depuis S. A. ORSZAG [1970] et E. ELIASSEN, B. MACHENHAUER et E. RASMUSSEN [1970], nous allons décrire une autre méthode plus rapide et plus simple, utilisant l'intégration numérique de GAUSS.

Méthode de transformation

Le principe est simple. On veut calculer l'intégrale :

$$A_n^m = \frac{1}{2\pi} \iint_S B C Y_n^{-m} d\lambda d\mu \quad ()$$

Il existe un ensemble de points sur la sphère S tel que l'intégrale () puisse être calculée exactement par une méthode numérique.

La méthode est simple :

- 1 - On calcule les valeurs de B et C sur cet ensemble de points.
- 2 - On calcule A par simple produit.
- 3 - On calcule A_n^m par quadrature numérique.

En pratique dans les modèles numériques on ne s'intéresse pas à tous les coefficients A_n^m de \mathcal{T}' mais seulement à ceux inclus dans \mathcal{T} , ce qui simplifiera l'exposé de la méthode.

Nous montrerons le principe en utilisant une forme de troncature, ce qui ne doit pas masquer son caractère général.

Soit donc :

$$\mathcal{T} = \left\{ (n, m); |m| \leq M, 0 \leq n - |m| \leq J \right\}$$

et

$$B = \sum_{\mathcal{T}} B_n^m Y_n^m; \quad C = \sum_{\mathcal{T}} C_n^m Y_n^m$$

Nous poserons :

$$B_m(\mu) = \sum_{n=|m|}^{|m|+J} B_n^m P_n^m(\mu) \quad B = \sum_{-M}^{+M} B_m e^{im\lambda}$$

$$C_m(\mu) = \sum_{n=|m|}^{|m|+J} C_n^m P_n^m(\mu) \quad C = \sum_{-M}^{+M} C_m e^{im\lambda}$$

de même :

$$A = \sum_{m=-2M}^{+2M} A_m(\mu) e^{im\lambda}$$

et nous allons calculer les A_m .

$$A = \sum_{m_1=-M}^{+M} \sum_{m_2=-M}^{+M} B_{m_1} C_{m_2} e^{i(m_1+m_2)\lambda}$$

donc :

$$A_m(\mu) = \sum_{m_1=-M}^{+M} \sum_{m_2=-M}^{+M} B_{m_1} C_{m_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m_1+m_2-m)\lambda} d\lambda \quad (13)$$

ensuite on calcule :

$$A_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A_m(\mu) P_n^m d\mu \quad (14)$$

Dans l'intégrale (14) l'intégrande est un polynôme, on peut donc la calculer exactement à l'aide de la méthode de GAUSS, c'est-à-dire sous la forme :

$$A_n^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k A_m(\mu_k) P_n^m(\mu_k)$$

où les μ_k sont les racines du polynôme de LEGENDRE P_K^0 et les ω_k coefficients de GAUSS correspondants. La formule de quadrature de GAUSS est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $2K-1$.

L'intégrale (13) peut être calculée analytiquement, en effet :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m_1+m_2-m)\lambda} d\lambda = \delta_m^{m_1+m_2}$$

E. ELIASSEN, B. MACHENHAUER et E. RASMUSSEN [1970] ont utilisé d'abord cette méthode analytique, en fait les fonctions circulaires sont orthogonales sur un nombre discret de points (cf H. W. ELLSAESSER [1966] par exemple) et l'on peut remplacer l'évaluation de $A_m(\mu_K)$ dans (13) par une quadrature numérique.

Il est intéressant pour cela d'utiliser une méthode de transformée de FOURIER rapide (voir J. P. LABARTHE [1973]).

Le problème est alors de déterminer le nombre de points N nécessaire au calcul de (13) et le nombre K .

Si l'on s'intéresse seulement aux coefficients A_n^m inclus dans la troncature \mathcal{Q} , le nombre N de points nécessaire au calcul de (13) doit être tel que :

$$N \geq 3M + 1$$

en effet l'intégrande dans la formule (13) est une fonction circulaire allant au maximum au nombre d'onde $3M$.

Pour la détermination de K il faut revenir au degré du polynôme dans la formule (14).

D'après (12') et (12'') on peut écrire :

$$A_m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} Q_{J'}(\mu)$$

où le degré de Q est :

$$J' = 2(M + J) - 2|m| \quad 0 \leq |m| \leq M$$

$$J' = 2J \quad M < |m| \leq 2M$$

L'intégrande sera donc de la forme :

$$(1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} Q_{J'} + n - |m|$$

soit au maximum $2M + 3J$.

K sera donc déterminé par l'inéquation :

$$2K - 1 \geq 2M + 3J$$

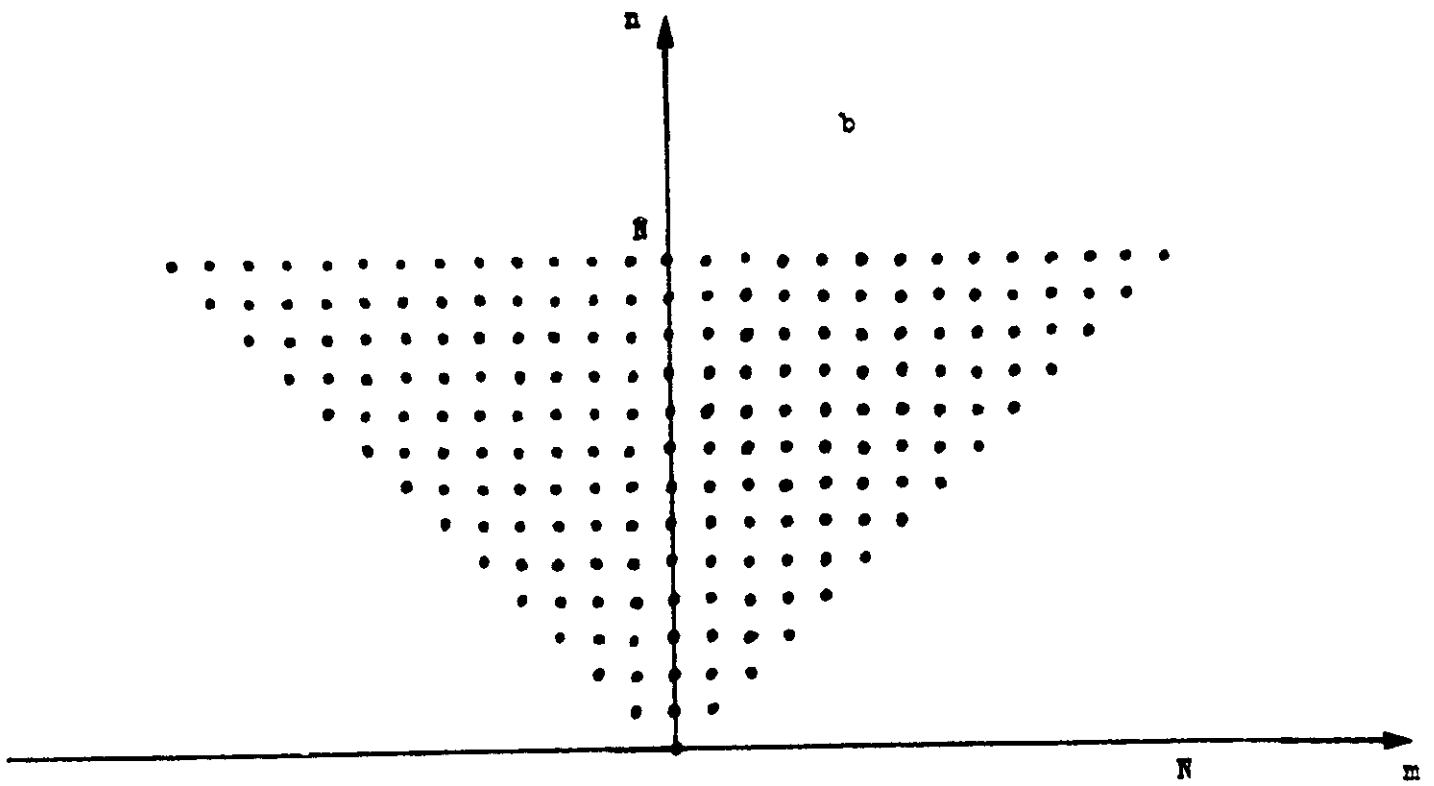
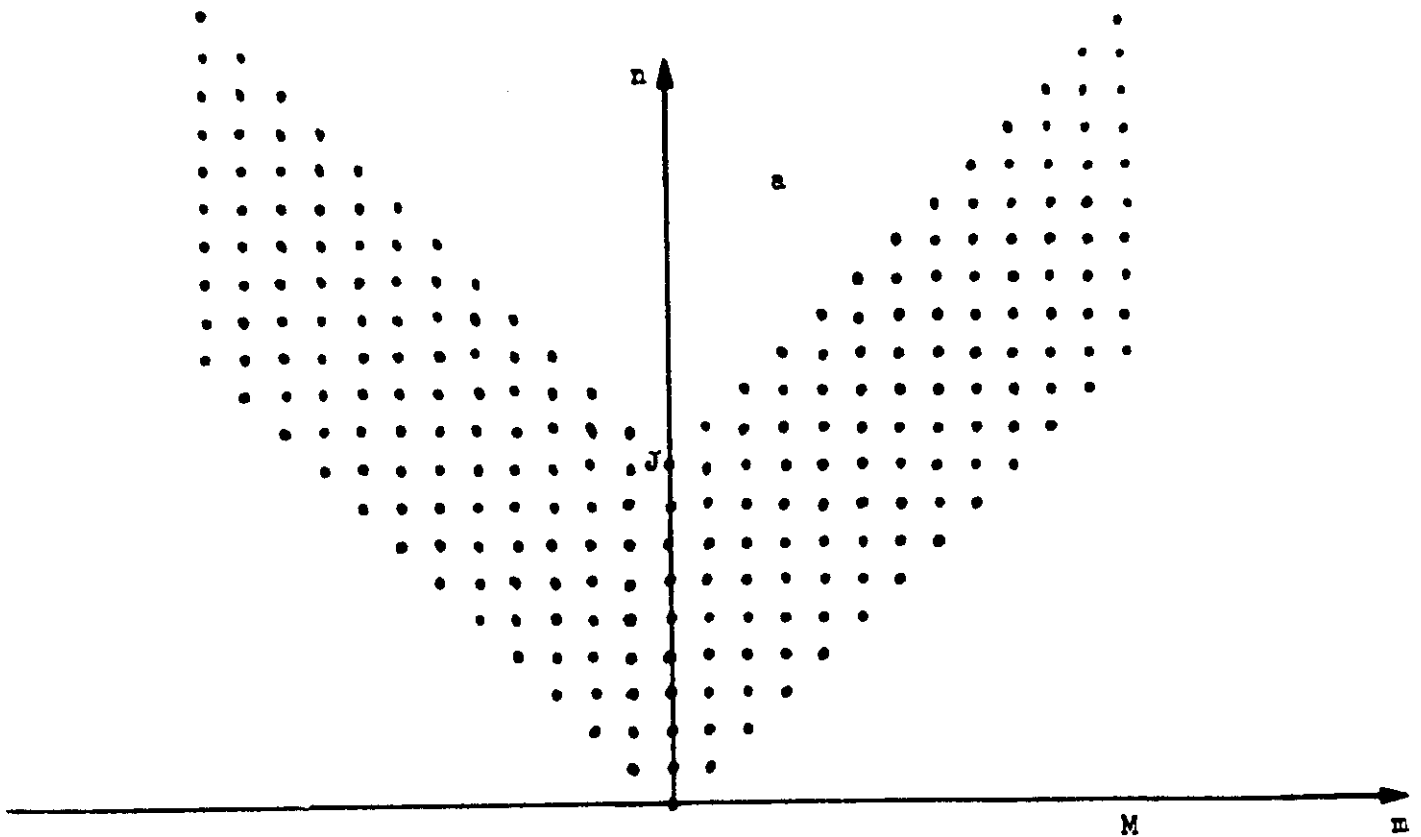
soit

$$K \geq M + \frac{3}{2}J + \frac{1}{2}$$

Cette méthode, grâce notamment à l'utilisation de la transformée de FOURIER rapide est nettement plus avantageuse aux points de vue temps et calcul et encombrement mémoire du calculateur que celle des coefficients d'interaction trouvée par I. SILBERMAN [1954].

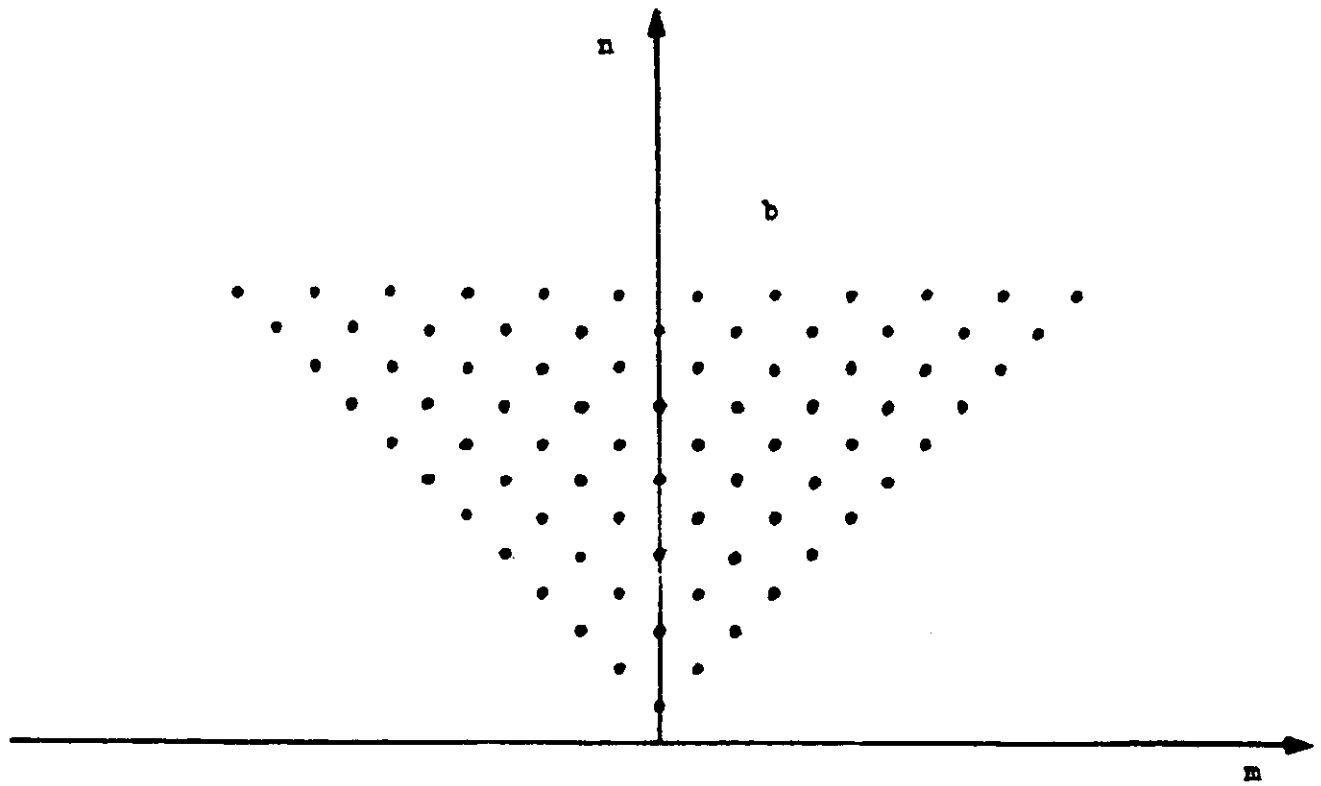
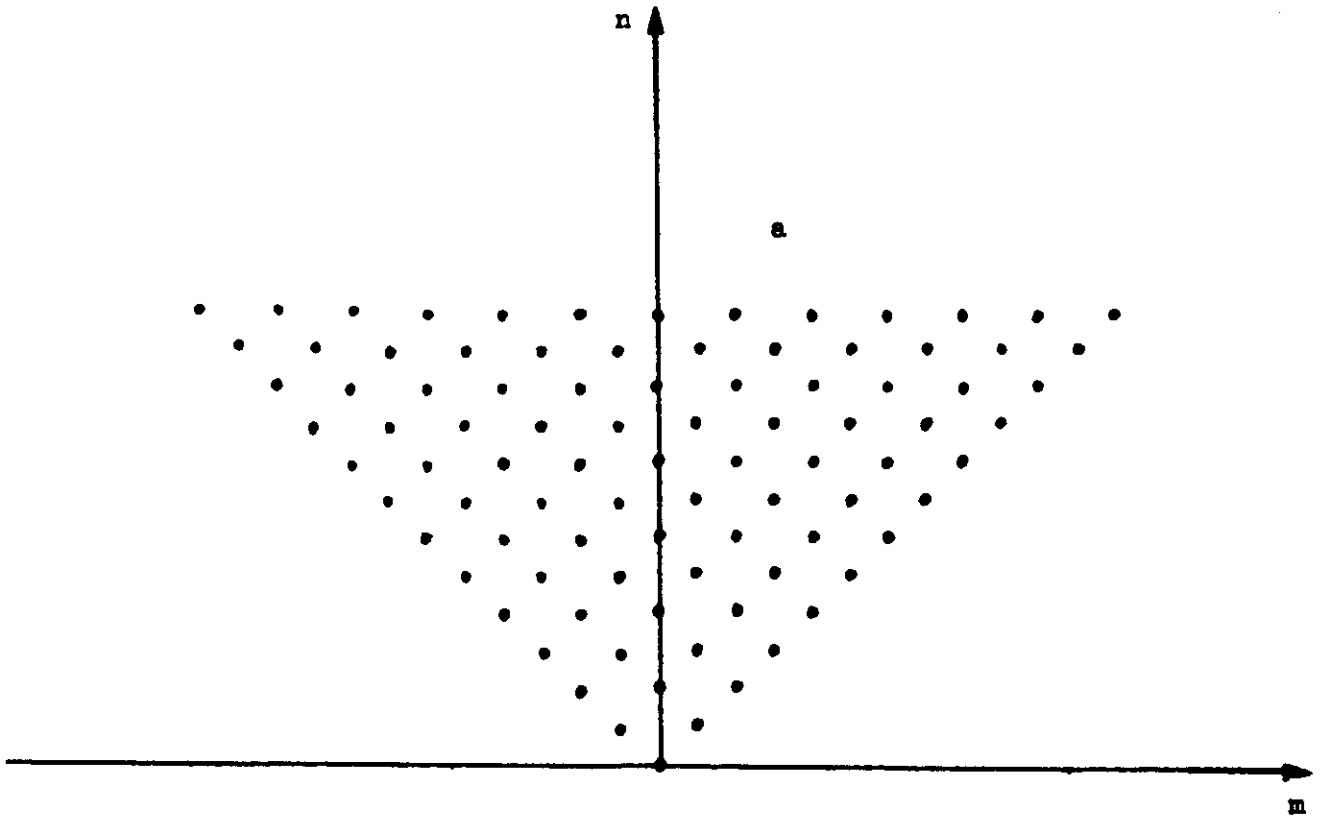
BIBLIOGRAPHIE

- [1969] G. DADY - *Météorologie dynamique et prévision numérique*. Ecole de la météorologie, Paris, 394 pp.
- [1965] E. ELIASSEN, B. MACHENHAUER - *A Study of the Fluctuations of the Atmospheric Flow Patterns represented by Spherical Harmonics*. *Tellus*, volume XVII, n° 2, p. 220-238.
- [1970] E. ELIASSEN, B. MACHENHAUER, E. RASMUSSEN - *On a Numerical Method for integration of the Hydrodynamical Equations with a Spectral Representation of the Horizontal Fields*. *København universitet. Institut for teoretisk meteorologi. Report n° 2*, 35 pp.
- [1966a] H. W. ELLSAESSER - *Evaluation of Spectral versus Grid methods of Hemispheric Numerical Weather Prediction*. *Journal of Applied Meteorology*, volume 5, n° 3, p. 246-262.
- [1966b] H. W. ELLSAESSER - *Expansion of Hemispheric Meteorological Data in Antisymmetric Surface Spherical Harmonic (LAPLACE) Series*. *Journal of Applied Meteorology*, volume 5, n° 3, p. 263-276.
- [1931] E. W. HOBSON - *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge University Press. 500 pp.
- [1973] J. P. LABARTHE - *A paraître*.
- [1968] P. E. MERILEES - *On the Linear Balance Equation in terms of Spherical Harmonics*. *Tellus*, volume XX, n° 1, p. 200-202.
- [1970] S. A. ORSZAG - *Transform Method for the Calculation of vector-coupled sums: application to the spectral form of the Vorticity Equation*. NCAR Manuscript 70-13, 17 pp.
- [1957] L. ROBIN - *Fonctions sphériques de LEGENDRE et fonctions sphéroïdales*. Collection Technique et Scientifique du C.N.E.T. GAUTHIER-VILLARS, 201 pp.
- [1971] M. ROCHAS - *Solution spectrale de l'équation de balance linéarisée sur la sphère*. Notes de l'E.E.R.M., n° 292, 11 pp.
- [1954] J. SILBERMAN - *Planetary waves in the atmosphere*. *Journal of Meteorology*, volume 11, n° 1, p. 27-34.



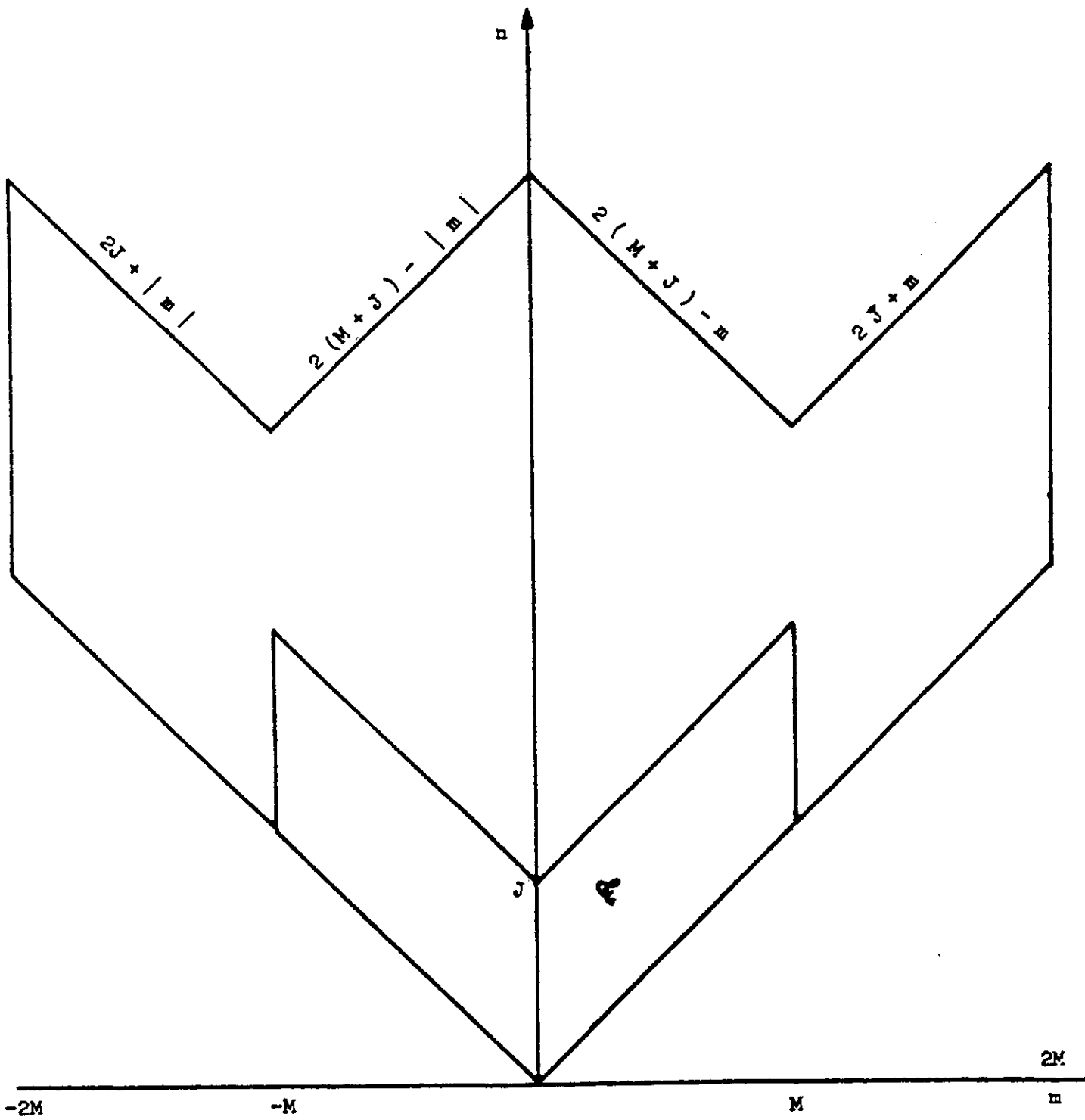
a. Troncature trapézoïdale
 b. Troncature triangulaire

Fig. 1.



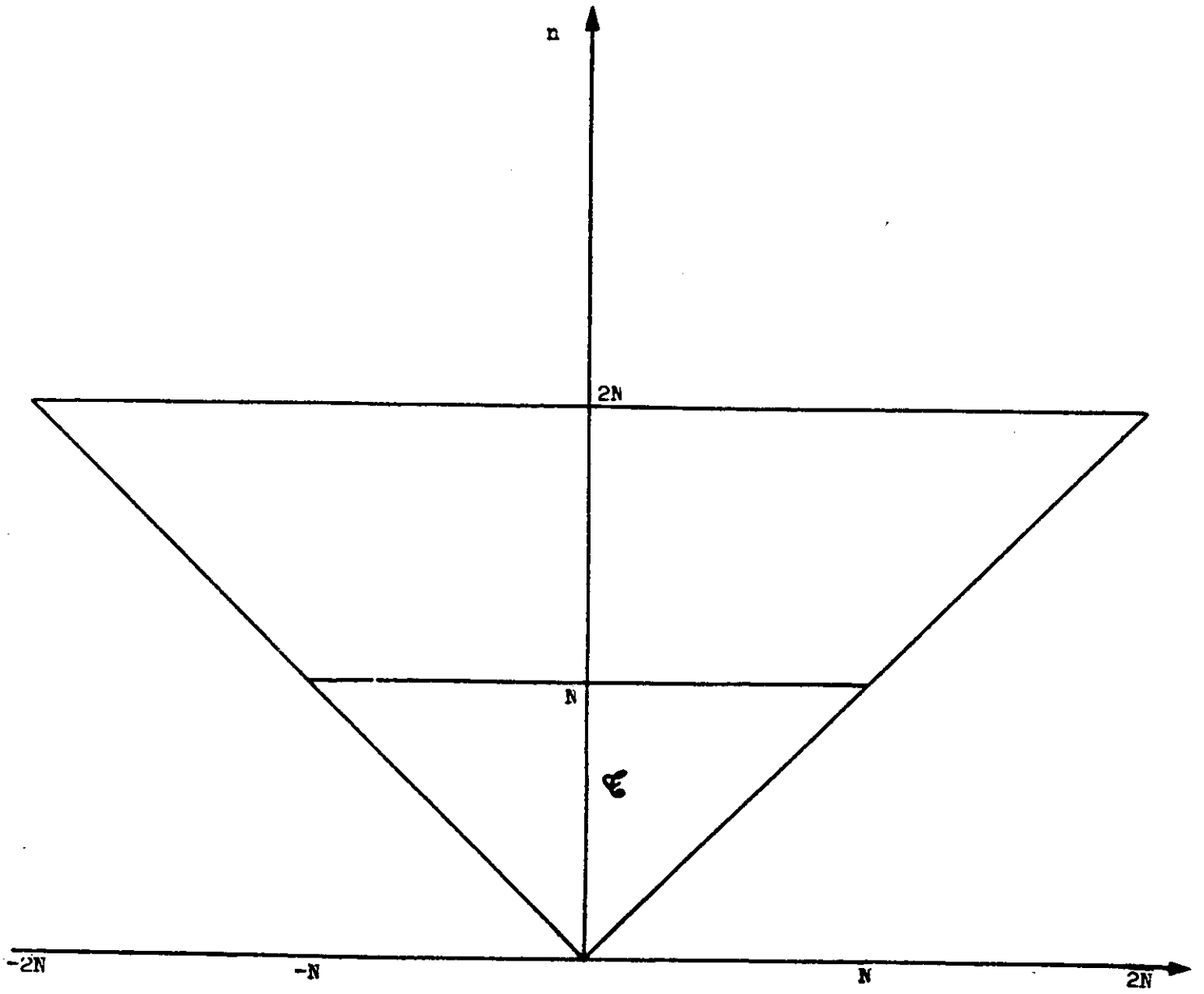
- a. Troncature paire
- b. Troncature impaire

Fig. 2.



Troncature produit de la Troncature par elle même

Fig. 3.



Troncature produit de la Troncature par elle même

Fig . 4.