INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION
INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
I.C.T.P., P.O. BOX 586, 34100 TRIESTE, ITALY, CABLE: CENTRATOM TRIESTE

WINTER COLLEGE ON "MULTILEVEL TECHNIQUES IN COMPUTATIONAL PHYSICS"

Physics and Computations with Multiple Scales of Lengths
(21 January - 1 February 1991)

H4.SMR 539/12

Non-Elliptic Problems

A. Brandt
The Weizmann Institute of Science
Rehovot. Israel

Non ellipticity

breakthrough
[illegible]

1. Indefinite

wave equations

2. Characteristic directions ξ

שאלה: $\underline{\varepsilon\ \text{קטן}}$ בסקלה [illegible]

$$-\varepsilon\Delta u + a u_x + b u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

$$\varepsilon \ll \eta\,|a, b|$$

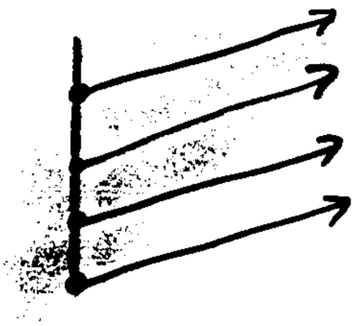
$\Downarrow$

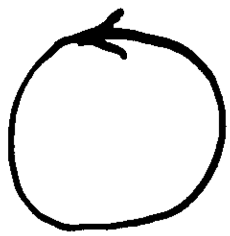
u קבוע לאורך קו

~ שקל

הכרחי: הפרדת מקרים

aligned ⟷ non-aligned





Boundary layers

Shocks

הספרות היא סרבנית : המקרים הקלים ולא חשובים לאפליקציה

למשל: רק aligned

consistent alignment

$$-\varepsilon h \Delta u + a u_x + \varepsilon' u_y$$

$$a u_{xx} + \varepsilon u_{yy}$$

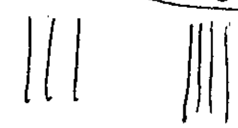
etc.

line relaxation, etc.

<u>semi coarsening</u>

במילא כך נבנה:

שקף:



Inconsistent alignment

$$\left.\begin{array}{l} a u_{xx} + \varepsilon u_{yy} \\ \varepsilon' u_{xx} + b u_{yy} \end{array}\right\}$$

Bad discretization

$\Rightarrow$ expensive mg

כי אם נעבר

מכוון קרקטריסטי.

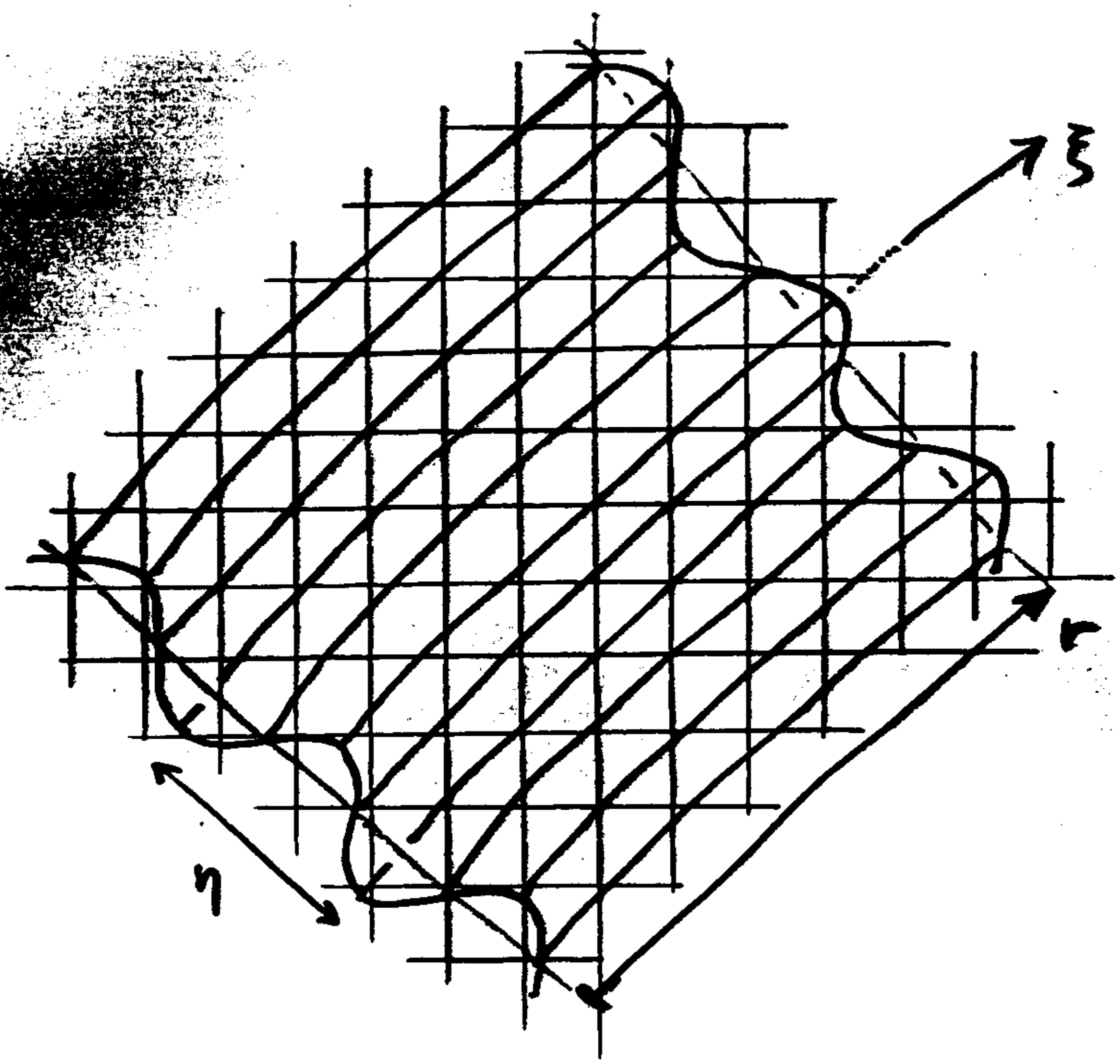
של L - צריך להיות

גם במקרה ביניים שחותך הסריג

⇐ המקרה הבא

הוסף שקף קווי סריג ירוקים

Characteristic component



Much smoother in the characteristic (stream) direction.

damped ע״י ה- אברים של אליפטיות

"zero-cross wind viscosity"
⇐ אליפטיות מספר ≥ 2

$$r_{survival}(\eta) \approx \begin{Bmatrix} \text{ellipticity measure} \\ \text{on scale } \eta \end{Bmatrix}^{-1} \eta$$

שקפי אליפטיות ומידת אליפטיות

+ accidental alignment

הפרחי ליניארי

$\Rightarrow$ **h-ellipticity** of order p

"artificial viscosity" if $p=1$

Easy smoothing!

אין לנו אלימינציה הפכית בעיגול

ביותר accidental align

אך גם זה נראה לנו שאינו נחוץ

הבעיה: CGC

$$\Rightarrow \quad r_{survival}(\eta) \approx (\eta/h)^p \eta$$

מסקנות:

- $r_{survival}(\text{high frequency}) = O(h)$

  לכן החלקה אינה חשובה!

- 2^p coarse grid corrections

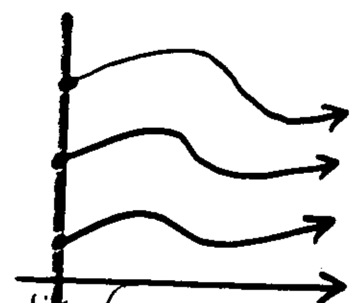
  W cycle for $p=1$

  Cycle index $= 2^p$

- $O(\eta/h)$ defect corrections

בלוק מנקלי!

Fast convergence by "down-stream" relaxation



e.g. $-\varepsilon\Delta u + a u_x + b u_y$

קורה עבור בעיות היפרבוליות US, אלא פלוס מינוס גם

מסלג היפרבוליות הכוונה

More complicated:

Curved characteristics

Several char. directions

(supersonic NS)

line relax!

Southw!

Hyperbolic - elliptic

(subsonic NS)

Incompressible Euler

$$L = \begin{pmatrix} \underline{u}\cdot\underline{\nabla} & 0 & \partial_x \\ 0 & \underline{u}\cdot\underline{\nabla} & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det L = -\Delta\left(\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right)$$

Analysis

$\frac{1}{2}$ space mode analysis

of (2-grid) FMG

כי לא מעוניינים בהתכנסות אסימפטוטית
לרכיבי חלק.

Simplified by

first-differetial

approximations (Yanenko)

כי הרכיבים המעניינים חלקים. הקסדיר או צניחה של מגרת משוואה בדיוק

$$L^h = L - h\Delta \qquad [1981]$$

Results

[B. + Yavneh]

mode analysis $\longleftrightarrow$ **numerical tests**

כמדד מאבחן

Convection - diffusion

Incompressible NS

- $\sim .1$ asymptotic convergence per cycle

  W(1,1)

  V(2,1)

- Solution to (much) below $O(h^2)$ discretization error in 1-FMG

  סייקל כנ״ל

  ~ 10 <u>minimal</u> work units

הערה: להשלים מודלית $\Leftarrow$ אפשרות <u>רגולריזציה</u>

1FMG with First-Order Discretization

h	F_i	v_0	$\|\|e_d\|\|_2$	$\|\|e_a\|\|_2/\|\|e_d\|\|_2$		
			type of cycle –	W(2,1)	W(1,1)	V(2,1)
1/32	F_1	0.10	8.49×10^{-3}	0.113	0.131	0.536
1/64	F_1	0.10	4.21×10^{-3}	0.032	0.042	0.839
1/128	F_1	0.10	2.10×10^{-3}	0.013	0.018	1.162
1/32	F_1	0.25	1.77×10^{-2}	0.113	0.140	0.490
1/64	F_1	0.25	8.85×10^{-3}	0.037	0.051	0.743
1/128	F_1	0.25	4.43×10^{-3}	0.016	0.021	1.034
1/32	F_1	0.50	2.46×10^{-2}	0.104	0.160	0.375
1/64	F_1	0.50	1.24×10^{-2}	0.042	0.067	0.569
1/128	F_1	0.50	6.20×10^{-3}	0.018	0.027	0.856
1/32	F_2	0.10	6.59×10^{-2}	0.018	0.022	0.023
1/64	F_2	0.10	5.49×10^{-2}	0.021	0.024	0.035
1/128	F_2	0.10	4.61×10^{-2}	0.022	0.023	0.044
1/32	F_2	0.25	7.88×10^{-2}	0.022	0.034	0.044
1/64	F_2	0.25	6.58×10^{-2}	0.023	0.030	0.051
1/128	F_2	0.25	5.55×10^{-2}	0.020	0.021	0.047
1/32	F_2	0.50	8.55×10^{-2}	0.023	0.052	0.036
1/64	F_2	0.50	7.12×10^{-2}	0.020	0.043	0.035
1/128	F_2	0.50	6.01×10^{-2}	0.018	0.027	0.031
1/32	F_3	0.10	1.22×10^{-2}	0.026	0.026	0.073
1/64	F_3	0.10	7.16×10^{-3}	0.013	0.013	0.095
1/128	F_3	0.10	4.25×10^{-3}	0.007	0.007	0.108
1/32	F_3	0.25	2.07×10^{-2}	0.031	0.032	0.074
1/64	F_3	0.25	1.22×10^{-2}	0.016	0.016	0.091
1/128	F_3	0.25	7.24×10^{-3}	0.008	0.008	0.100
1/32	F_3	0.50	2.62×10^{-2}	0.031	0.037	0.062
1/64	F_3	0.50	1.53×10^{-2}	0.017	0.019	0.073
1/128	F_3	0.50	9.06×10^{-3}	0.009	0.010	0.088
1/32	F_4	0.10	1.43×10^{-2}	0.036	0.038	0.086
1/64	F_4	0.10	7.43×10^{-3}	0.021	0.022	0.126
1/128	F_4	0.10	3.81×10^{-3}	0.011	0.012	0.164
1/32	F_4	0.25	2.59×10^{-2}	0.038	0.042	0.079
1/64	F_4	0.25	1.43×10^{-2}	0.022	0.021	0.106
1/128	F_4	0.25	7.58×10^{-3}	0.013	0.013	0.129
1/32	F_4	0.50	3.28×10^{-2}	0.037	0.048	0.064
1/64	F_4	0.50	1.85×10^{-2}	0.024	0.023	0.081
1/128	F_4	0.50	1.00×10^{-2}	0.014	0.014	0.105

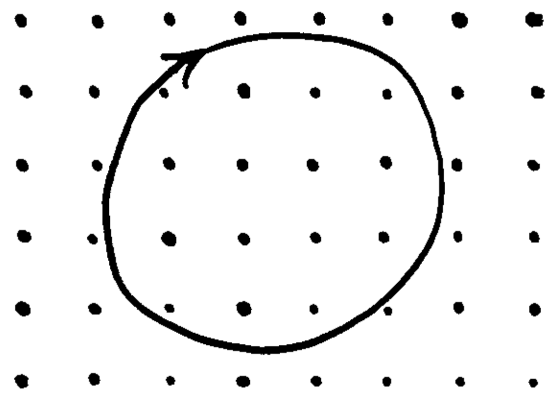
Table 1.

1FMG with Second-Order Discretization

h	F_i	v_0	$\lVert e_d \rVert_2$	$\lVert e_a \rVert_2 / \lVert e_d \rVert_2$		
			type of cycle –	W(2,1)	W(1,1)	V(2,1)
1/32	F_1	0.10	9.52×10^{-4}	0.056	0.151	0.223
1/64	F_1	0.10	2.18×10^{-4}	0.033	0.097	0.216
1/128	F_1	0.10	4.77×10^{-5}	0.024	0.111	0.339
1/32	F_1	0.25	1.12×10^{-3}	0.108	0.231	0.434
1/64	F_1	0.25	2.61×10^{-4}	0.063	0.172	0.569
1/128	F_1	0.25	6.10×10^{-5}	0.038	0.232	0.660
1/32	F_1	0.50	9.85×10^{-4}	0.353	0.430	0.526
1/64	F_1	0.50	1.99×10^{-4}	0.147	0.293	2.095
1/128	F_1	0.50	2.61×10^{-5}	0.154	0.524	3.943
1/32	F_2	0.10	5.52×10^{-2}	0.022	0.036	0.022
1/64	F_2	0.10	4.60×10^{-2}	0.036	0.054	0.042
1/128	F_2	0.10	3.77×10^{-2}	0.067	0.087	0.088
1/32	F_2	0.25	5.80×10^{-2}	0.037	0.053	0.046
1/64	F_2	0.25	4.77×10^{-2}	0.086	0.103	0.110
1/128	F_2	0.25	3.96×10^{-2}	0.161	0.203	0.204
1/32	F_2	0.50	6.19×10^{-2}	0.109	0.121	0.140
1/64	F_2	0.50	4.60×10^{-2}	0.159	0.211	0.192
1/128	F_2	0.50	3.55×10^{-2}	0.571	0.916	0.698
1/32	F_3	0.10	6.27×10^{-3}	0.013	0.020	0.022
1/64	F_3	0.10	3.31×10^{-3}	0.012	0.019	0.019
1/128	F_3	0.10	1.75×10^{-3}	0.013	0.018	0.018
1/32	F_3	0.25	7.23×10^{-3}	0.022	0.032	0.049
1/64	F_3	0.25	3.82×10^{-3}	0.030	0.040	0.050
1/128	F_3	0.25	2.04×10^{-3}	0.033	0.040	0.049
1/32	F_3	0.50	6.13×10^{-3}	0.059	0.078	0.103
1/64	F_3	0.50	2.66×10^{-3}	0.104	0.143	0.138
1/128	F_3	0.50	1.17×10^{-3}	0.132	0.178	0.170
1/32	F_4	0.10	4.45×10^{-3}	0.026	0.027	0.049
1/64	F_4	0.10	1.42×10^{-3}	0.028	0.036	0.047
1/128	F_4	0.10	4.64×10^{-4}	0.028	0.044	0.058
1/32	F_4	0.25	5.36×10^{-3}	0.067	0.082	0.124
1/64	F_4	0.25	1.74×10^{-3}	0.054	0.048	0.076
1/128	F_4	0.25	5.77×10^{-4}	0.040	0.042	0.117
1/32	F_4	0.50	3.24×10^{-3}	0.269	0.343	0.411
1/64	F_4	0.50	7.89×10^{-4}	0.265	0.326	0.330
1/128	F_4	0.50	1.86×10^{-4}	0.288	0.391	0.701

Table 2.

Non aligned recirculating flows



<u>uniform</u> artificial viscosity (not upwinding) near closed streamlines

- for accuracy
- for mg efficiency

Double discretization יש מאמר

כך תמיד: עם מגיעים לזה בעיית דיסקרטיזציה

skip b.l. if not dominant !

Dominant Boundary Layer

If unresolved:

- Wrong R
- Inefficient defect corrections
- Inefficient mg

Resolution by

$\boxed{\text{local coord. transf. } f_{\text{p}}}$

- Boundary-aligned FAS patch
- Local semi-refinement
- No cross-wind art. viscosity

→ Line (plane) relaxation
on coarse levels ?

Better: Flow aligned

Shocks

- Accurately moved by the coarse grid correction

  if

  conservative coarsening
  (full weighting of residuals)

- Usual interpolation of corrections. Enforce $p, \rho, \varepsilon > 0$

- Extra relaxation near shocks

Indefinite Equations

$\Delta u + k^2 u = 0$

standing waves. wavelength: $\frac{2\pi}{k}$

ההתפתחות החשובה ביותר

$$\int_\Omega G(x,y)\, e^{ik|x-y|}\, dy = f(x, u(x))$$

$x \in \Omega$ = boundary

eg: $G(x,y) = \frac{1}{|x-y|}$

discretized on n boundary points

(Similar: particles)

$n \times n$ dense matrix

Solved in $O(n(\log n)^q)$ ops.

Proc. IMACS 1st. Int. Conf. on Comp. Phys.
Boulder, Colorado, June 1990

Balsara - B. This Conf: $k=0$