INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION
INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
I.C.T.P., P.O. BOX 586, 34100 TRIESTE, ITALY, CABLE: CENTRATOM TRIESTE

SMR.770/9

ADVANCED WORKSHOP ON ALGEBRAIC GEOMETRY

(15 - 26 August 1994)

Systèmes cohérents et polynômes de Donaldson

J. Le Potier
U.F.R. de Mathématiques
Université Paris 7
Tour 45-55, 5ème étage
2, Place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
France

These are preliminary lecture notes, intended only for distribution to participants

Systèmes cohérents et polynômes de Donaldson

J. Le Potier
Université Paris 7.

Une partie de l'exposé repose sur des résultats obtenus avec Min He.

Soient M_n l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(0,n)$ sur $\mathbb{P}_2$, et $\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)$ le schéma de Hilbert des sous-schémas finis de $\mathbb{P}_2$ de longueur $n+1$. Le but de l'exposé est de montrer comment on peut ramener le calcul de certains nombres d'intersection sur M_n au calcul de nombres d'intersection sur $\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)$.

1 Généralités.

Soit X une variété projective complexe lisse polarisée. On désigne par $K(X)$ l'algèbre de Grothendieck des faisceaux algébriques cohérents sur X ; elle est munie de la forme quadratique entière $q: u \mapsto \chi(u^2)$, dont on désigne par $\langle\, , \rangle$ la forme polaire. On pose

$$K_{num}(X) = K(X)\big/_{\ker q}$$

et on désigne par h la classe dans $K(X)$ d'une section hyperplane.

Soit F un faisceau algébrique cohérent sur X. La dimension de F est la dimension du support. Le nombre $\langle F, h^d \rangle = r$ est appelé multiplicité de F.

Définition 1. Un système cohérent de dimension d sur X est la donnée d'une paire (Γ, F), où F est un faisceau algébrique cohérent de dimension d, et $\Gamma \subset H^0(F)$ un sous-espace vectoriel.

On se fixe un polynôme $\alpha > 0$ à coefficients rationnels. Étant donné un système cohérent (Γ, F), on pose

$$P_{(\Gamma,F)} = \frac{1}{r}\left(\alpha \dim \Gamma + P_F\right)$$

où r est la multiplicité de F, et P_F le polynôme de Hilbert de F:

$$P_F(m) = \sum_{0 \leq i \leq d} C^i_{m+i-1} \langle F, h^i \rangle .$$

Définition 2. Un système cohérent (Γ, F) de dimension d sur X est dit α-semi-stable (resp. α-stable) si

(1) F est pur de dimension d,

(2) Pour tout sous-faisceau cohérent F' non nul et distinct de F, on a $p_{(\Gamma', F')} \leq p_{(\Gamma, F)}$ (resp. $<$) où $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(F')$.

Théorème 1. Soit $c \in K_{num}(X)$ et $k \in \mathbb{N}$.

(1) Il existe pour les systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F)$ α-semi-stables tels que F soit de classe c dans $K_{num}(X)$ et $\dim \Gamma = k$ un espace de modules grossier $\mathrm{Syst}_{X,\alpha}(c, k)$.

(2) Cet espace de modules est une variété projective.

(3) Les points de $\mathrm{Syst}_{X,\alpha}(c,k)$ sont les classes de S-équivalence de systèmes cohérents α-semi-stables

La notion de S-équivalence a un sens parce que la catégorie des systèmes cohérents (Γ, F) α-semi-stables avec $P_{(\Gamma,F)}$ fixé est une catégorie abélienne, et les filtrations de Jordan-Hölder ont un sens.

On peut plonger la catégorie des systèmes cohérents Λ comme sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne avec suffisamment d'injectifs. Ceci permet de définir les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^q(\Lambda, \Lambda)$. Si $\Lambda \in \mathrm{Syst}_{X,\alpha}(c,k)$ est un point stable et si $\mathrm{Ext}^2(\Lambda,\Lambda) = 0$, l'espace de modules $\mathrm{Syst}_{X,\alpha}(c,k)$ est lisse au point Λ.

2. Exemple.

On prend $X = \mathbb{P}_2$. Alors $K(X) = K_{num}(X) = \mathbb{Z}^3$. On pose $c = 2 - nh^2$ et on pose

$$S_{\alpha,n} = \mathrm{Syst}_{\mathbb{P}_2,\alpha}(c(1), 1)$$

Cet espace de modules est donc l'espace de modules des systèmes cohérents α-semi-stables $(\Gamma, F(1))$, où F est un faisceau cohérent de rang 2 et classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$, (sans torsion).

Si cet espace est non vide, on a

$$0 < \alpha \leq \beta$$

où β est le polynôme $m \mapsto 2m + 4 - n$.

Théorème 2. On suppose $n \geq 2$, $0 < \alpha \leq \beta$.

(1) Les variétés $S_{\alpha,n}$ sont irréductibles et normales de dimension $3n+2$

(2) La variété $S_{\alpha,n}$ n'a pas de point strictement semi-stable sauf si $\alpha = \beta$ ou si $\alpha \equiv n\ (2)$, $0 < \alpha \leq n$. Ces valeurs sont appelées valeurs critiques. Entre deux valeurs critiques, $S_{\alpha,n}$ est lisse et reste constant. Si α est valeur critique et $n \geq 3$, $\alpha < \beta$, $S_{\alpha,n}$ est singulière aux points strictement semi-stables, et lisse en dehors

(3) Pour $\alpha = \beta$, tous les points sont semi-stables strictement et $S_{\beta,n} \simeq \mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)$

(4) Soit $\beta_- < \beta$ proche de β. La variété $S_{\beta^-,n}$ est l'espace des extensions non scindées

$$0 \to (\mathbb{C}, \mathcal{O}_X) \to (\Gamma, F(1)) \to (0, I(2)) \to 0$$

où I est l'idéal d'un sous-schéma fini de longueur $n+1$ de $\mathbb{P}_2$. Soit $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ le sous-schéma universel, et $\mathcal{V}$ le fibré vectoriel de rang $n+1$ sur $\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)$ défini par $\mathcal{V} = pr_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi}(0,-1))$. Alors

$$S_{\beta^-,n} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{V})$$

(5) Soit α une valeur critique $< \beta$, et $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$ des valeurs proches de α. Alors il existe des morphismes birationnels

$$\begin{tikzcd} S_{\alpha^-,n} \arrow[dr, "p_-"'] & & S_{\alpha^+,n} \arrow[dl, "p_+"] \\ & S_{\alpha,n} & \end{tikzcd}$$

Pour $n > 2$, p_+ et p_- sont des désingularisations de $S_{\alpha,n}$.

(6) Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a un morphisme

$$f : S_{\varepsilon, n} \to M_n$$

Pour $n \leq 5$ ce morphisme est surjectif et la fibre générique est $\mathbb{P}^{5-n}$. Pour $n \geqslant 6$, f est génériquement injectif et l'image de f est la variété déterminantielle de Brill-Noether définie par la condition $h^0(F(1)) > 0$.

3. Polynômes de Donaldson.

Soit $(X, \mathcal{O}_X(1))$ une surface algébrique projective lisse et simplement connexe. On désigne par M_n l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 et classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$ sur X. On suppose

(i) $\dim M_n = 4n - 3(1 + p_g) =: d$

(ii) Pour tout $i > 0$ $\dim M_{n-i} \times S^i X < d$

(iii) Il n'existe pas de $\alpha \in \mathrm{Pic}(X)$

tel que $\qquad -n \leqslant \alpha^2 < 0.$

On définit de manière naturelle une application $\mathbb{Z}$-linéaire

$$\mu : \quad H_2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(M_n, \mathbb{Z})$$

Pour u algébrique, $\mu(u)$ est la classe de Chern du fibré déterminant D_u associé à u : ce fibré a un sens à cause de la condition (iii). Le polynôme de Donaldson de degré d de X est alors défini par

$$q_{d,X}(u) = \int_{M_n} \mu(u)^d$$

C'est un polynôme homogène de degré d $H_2(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$; quand $p_g > 0$, ce polynôme ne dépend pas de la polarisation et coïncide avec le polynôme défini par voie différentielle par Donaldson (résultat de Morgan). Quand $p_g = 0$, ce polynôme peut changer quand on change la polarisation.

Cas du plan projectif

Si $X = \mathbb{P}_2$, $a = \dim M_n = 4n-3$.

Si on prend pour u la classe fondamentale d'une droite, on obtient un nombre $q_{4n-3} \in \mathbb{N}$ qu'on appelle nombre de Donaldson. Le fibré déterminant $\mathcal{D}_u$ est dans ce cas l'image réciproque de $\mathcal{O}(1)$ par le morphisme naturel $\gamma : M_n \to |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)|$ qui associe à un faisceau semi-stable F la courbe $\gamma(F)$ de ses droites de saut. Ce morphisme est génériquement fini sur son image et on a donc

$$q_{4n-3} = \deg(\gamma \; M_n \to \gamma(M_n)) \times \deg \gamma(M_n)$$

En utilisant cette interprétation et les résultats de Barth, on obtient $q_5 = 1$, $q_9 = 3$. Pour $n = 4$, on démontre que $\gamma : M_4 \to \gamma(M_4)$ est génériquement injective, et $r(M_4)$ est l'hypersurface des quartiques de Lüroth, de degré 54. Ainsi $q_{13} = 54$.

Soit $\mathcal{L}$ l'image réciproque du générateur >0 de $\mathrm{Pic}\,(S^{n+1}\mathbb{P}_2) \simeq \mathbb{Z}$ par le morphisme canonique

$$\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2) \to S^{n+1}\mathbb{P}_2$$

On pose $\eta = c_1(\mathcal{L})$.

Théorème 3.

(1) Pour $n \leq 5$

$$q_{4n-3} = \int_{\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{5-n} s_{3n-3}(\mathcal{V}^\vee \otimes \mathcal{L})$$

(2) Pour $n = 6$

$$q_{21} = \frac{2}{5} \int_{\mathrm{Hilb}^{7}(\mathbb{P}_2)} s_{14}(\mathcal{V}^\vee \otimes \mathcal{L})$$

La classe $s_j(V\otimes\mathcal{L})$ désigne dans cet énoncé la classe de Segre d'indice j de $V\otimes\mathcal{L}$.

Ce résultat pour $n=5$ et 6 a aussi été obtenu par Ellingsrud et Strømme, et par Tyurin et Tikhomirov, par des voies différentes.

La démonstration pour $n=5$ s'obtient en remarquant que pour tout $\alpha<\beta$ on peut définir un fibré déterminant $\mathcal{L}_{\alpha,n}$ sur $S_{\alpha,n}$, des propriétés fonctorielles du fibré déterminant il résulte que $\mathcal{D}_{\alpha^-,n} = p_-^*(\mathcal{L}_{\alpha,n})$ et $\mathcal{D}_{\alpha^+,n} = p_+^*(\mathcal{L}_{\alpha,n})$. Il en résulte que l'intégrale

$$I_{\alpha,n} = \int_{S_{\alpha,n}} c_1(\mathcal{L}_{\alpha,n})^{3n-2}$$

reste constante quand α varie.

Pour calculer $I_{\beta^-,n}$, on utilise alors la suite exacte universelle sur $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \times \mathbb{P}_2$

$$0 \to \mathcal{O}(1,-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}(0,1) \to \mathcal{O}_{\Xi}(0,1) \to 0$$

pour calculer le fibré déterminant $\mathcal{D}_{\beta^-,n}$: on obtient $\mathcal{D}_{\beta^-,n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(1) \otimes \mathcal{L}$. Ceci conduit à la formule

$$I_{\beta^-,n} = \int_{\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)} s_{2n+2}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{L})$$

Pour $n=5$, $f : S_{\varepsilon,5} \to M_5$ est birationnel, et $f^*(\mathcal{D}_u) = \mathcal{D}_\varepsilon$. Donc $I_{\varepsilon,5} = q_{17}$. Pour les autres valeurs de n, il faut modifier un peu l'argument ci-dessus.

Il reste à calculer les intégrales obtenues sur le schéma de Hilbert : ceci repose sur la formule des résidus de Bott.

4. Formule des résidus de Bott.

Soit M une variété analytique compacte de dimension m, et $E \to M$ un fibré vectoriel holomorphe de rang r. Une dérivée de Lie sur E est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1

$$L : E \to E$$

dont le symbole $\sigma(L) : E \to E \otimes T$ est de la forme $\mathrm{id}_E \otimes \xi$ où ξ est un champ de vecteurs sur M. Un tel opérateur L apparaît quand on dispose d'une action de $\mathbb{C}^*$ sur (E, M) en prenant la dérivée au point 1.

Ainsi, si ξ est un champ de vecteurs, $L_\xi : \eta \to [\xi, \eta]$ est une dérivée de Lie sur le fibré tangent.

Etant donnée une dérivée de Lie L sur E, de champ de vecteurs associé ξ, on lui associe au dessus d'un zéro p de ξ une application $\mathbb{C}$-linéaire $L_p : E_p \to E_p$.

Le champ de vecteurs ξ est dit non dégénéré si $L_{\xi,p}$ est inversible en tout point $p \in M$ où ξ s'annule.

Soit $\Phi : \mathrm{End}(\mathbb{C}^r) \to \mathbb{C}$ un polynôme homogène de degré n, invariant par conjugaison par $GL(r, \mathbb{C})$. Soit $K \in H^1(M, \Omega^1(\mathrm{End}\, E))$ la classe d'Atiyah de E. Alors $\Phi(K)$ ne dépend que des classes de Chern de E.

Théorème (Bott). Soit L une dérivée de Lie sur E, de champ de vecteurs associé ξ. Si ξ est non dégénéré on a

$$\int_M \Phi(K) = \sum_{p \in \mathrm{Zero}(\xi)} \frac{\Phi(L_p)}{\det(L_{\xi,p})}$$

On applique cet énoncé à $M = \mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)$ pour calculer l'intégrale

$$J_n = \int_{\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)} s_{2n+2}(V^2 \otimes \mathcal{L})$$

Pour ceci on choisit un sous-groupe à un paramètre $\mathbb{C}^* \subset PGL(3,\mathbb{C})$ général, et on considère le dérivé de Lie associé sur $V^2 \otimes \mathcal{L}$. Le nombre de zéros du champ de vecteurs associé, donné par $\chi(\mathrm{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2))$, s'élève très rapidement : pour $n=5$, $\chi(\mathrm{Hilb}^6(\mathbb{P}_2)) = 221$. Le calcul nécessite un ordinateur ; un programme a été établi par Ellingsrud et Strømme. On trouve finalement

$$q_{17} = 2540 \qquad ; \qquad q_{21} = 233\,208 .$$