



INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION



INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
34100 TRIESTE (ITALY) - P.O.B. 586 - MIRAMARE - STRADA COSTIERA 11 - TELEPHONES: 224381/2/3/4/5/6
CABLE: CENTRATOM - TELEX 460392 I

SMR/92 - 10

AUTUMN COURSE

ON

VARIATIONAL METHODS IN ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS

20 October - 11 December 1981

OSCILLATIONS FORCEES DE SYSTEMES HAMILTONIENS

M. WILLEM

Institut Mathématique
2 Chemin du Cyclotron 2
B-1348 Louvain-la-Neuve
Belgium

These are preliminary lecture notes, intended only for distribution to participants.
Missing or extra copies are available from Room 230.

OSCILLATIONS FORCÉES DE SYSTÈMES HAMILTONIENS

Michel WILLEM

INTRODUCTION :

Ce travail est consacré à l'existence de solutions T -périodiques (oscillations) de systèmes différentiels du second ordre de la forme

$$\ddot{u} + D_u V(t, u) = 0$$

où la fonction V est T -périodique en t . Cette condition n'implique pas l'existence d'oscillations. Une méthode simple consiste à minimiser l'action

$$\int_0^T \left[\frac{|\dot{u}|^2}{2} - V(t, u) \right] dt$$

sur un espace de fonctions T -périodiques "régulières" en supposant que

$$V(t, u) \rightarrow -\infty, \quad |u| \rightarrow \infty,$$

(voir [2]). En affinant cette approche, on met en évidence l'existence d'oscillations de l'équation du pendule forcé

$$\ddot{u} + \sin u = f(t)$$

lorsque la fonction f est de moyenne nulle sur $[0, T]$. Ce résultat généralise un travail récent de Castro ([5]). On démontre aussi l'existence d'oscillations impaires lorsque f est impaire et d'oscillations impaires non triviales lorsque $f \equiv 0$ et $T > 2\pi$.

Dans le cas où

$$V(t, u) \rightarrow \infty, \quad |u| \rightarrow \infty,$$

il est hors de question de minimiser l'action. Néanmoins, l'existence d'oscillations est obtenue lorsqu'il existe $k \in]0, 4\pi^2/T^2[$ et $c > 0$ tels que

$$V(t, u) \leq k \frac{|u|^2}{2} + c$$

et

$$(1) \quad (D_u V(t, u_1) - D_u V(t, u_2), u_1 - u_2) \leq \frac{4\pi^2}{T^2} |u_1 - u_2|^2.$$

On trouvera des résultats analogues dans [6], [7] et [11]. Comme dans [7] on utilise un principe de moindre action dual, mais la convexité de V en u est remplacée par la condition de Lipschitz unilatérale (1).

Outre leur intérêt numérique, les principes variationnels permettent d'étudier la stabilité des oscillations. En particulier on montre que, dans le cas d'une équation, tout minimum "local" de l'action correspond à une oscillation instable. Ce résultat constitue une généralisation non autonome du théorème d'instabilité de Lagrange-Dirichlet.

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION :

Soient $T > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note H l'espace des fonctions absolument continues et T -périodiques $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $\dot{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n) = L^2$. L'espace H est muni du produit scalaire

$$(u_1, u_2)_H = \int_0^T [(u_1, u_2) + (\dot{u}_1, \dot{u}_2)]$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On note X l'ensemble des fonctions de H qui sont constantes et Y l'ensemble des fonctions de H qui sont de moyenne nulle. L'espace H est la somme orthogonale de X et de Y . Si $w \in Y$, w vérifie l'inégalité de Wirtinger

$$|\dot{w}|_{L^2} \geq \frac{2\pi}{T} |w|_{L^2}$$

où $|\cdot|_{L^2}$ est la norme usuelle sur L^2 .

Soit $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (t, u) \mapsto V(t, u)$ une fonction continue, T -périodique en t et dérivable en u . On suppose $D_u V$ continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si $f \in L^2$, on définit φ sur H par

$$\varphi(u) = \int_0^T \left[\frac{|\dot{u}|^2}{2} - V(t, u) + (f(t), u) \right] dt,$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On étend f à $\mathbb{R}$ par T -périodicité. L'interprétation mécanique de φ est claire. L'intégrand est le lagrangien,

$|\dot{u}|^2/2$ l'énergie cinétique, $V(t, u)$ l'énergie potentielle et $f(t)$ un terme forçant. La fonction φ étant la somme d'une fonction convexe continue et d'une fonction faiblement continue (théorème d'injection de Sobolev) est faiblement semi-continue inférieurement. De plus φ est dérivable et

$$\langle D\varphi(u), h \rangle_{H^1, H} = \int_0^T [(\dot{u}, \dot{h}) - (D_u V(t, u), h) + (f(t), h)] dt.$$

On appelle points critiques de φ les points où $D\varphi$ s'annule et valeurs critiques de φ les valeurs de φ aux points critiques.

Par conséquent les points critiques de φ sont les solutions faibles de

$$(2) \quad \ddot{u} + D_u V(t, u) = f(t).$$

(Si, de plus, f est continue et T -périodique, u est deux fois continûment dérivable). La recherche des solutions T -périodiques de (2) est donc ramenée à l'étude des points critiques de φ .

Si l'on suppose avec Berger que $f \equiv 0$ et que

$$V(t, u) \rightarrow -\infty, \quad |u| \rightarrow \infty,$$

uniformément en t , on démontre la coercivité de φ ([2]). Dès lors φ atteint son infimum en un point de H qui est nécessairement un point critique (condition nécessaire au premier ordre). La section suivante envisage une situation où φ n'est pas coercive.

2 - OSCILLATIONS DE L'EQUATION DU PENDULE FORCÉ :

L'équation du pendule forcé

$$(3) \quad \ddot{u} + \sin u = f(t),$$

où f est T -périodique, est l'une des plus anciennes et des plus importantes de la mécanique et même des mathématiques tout entières. Le Chanoine Lemaître dit à propos de l'équation autonome : "Ce problème du pendule est un de ceux où la mécanique a apporté une des plus grandes contributions à l'édifice des mathématiques modernes puisqu'elle s'identifie longuement avec l'étude des fonctions elliptiques autour de laquelle s'est édifiée la théorie des fonctions de variables complexes".

Dans le cas de "petites" oscillations forcées, l'approximation du troisième ordre de (3) a occupé une place centrale dans la "mécanique non linéaire"

des années trente sous le nom d'équation de Duffing. Mais ce n'est qu'assez récemment que l'étude des "grandes" oscillations de (3) a été abordée.

Cet état de chose s'explique probablement par l'alternative suivante : selon la valeur de f l'ensemble des oscillations de (3) est soit vide, soit non borné. Notre premier théorème généralise un résultat de Castro [5] qui assure l'existence d'oscillations de (3) lorsque $T \leq 2\pi$ et $\int_0^T f = 0$. Castro utilise la méthode de Liapounov-Schmidt qui ne semble pas s'appliquer lorsque $T > 2\pi$. Il serait intéressant de caractériser les termes forçants pour lesquels (3) admet des oscillations.

Théorème 1 : Soient V et f vérifiant les hypothèses de la section 1. S'il existe $\tau_1, \dots, \tau_n > 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall i$,

$$(4) \quad V(t, u + \tau_i e_i) = V(t, u)$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et si

$$(5) \quad \int_0^T f = 0,$$

alors le système (2) admet une solution T -périodique faible qui minimise φ sur H .

Démonstration : Soit $u \in H$. On pose $u = v + w$, $v \in X$ et $w \in Y$. On déduit de (5) que

$$\varphi(u) = \int_0^T \left[\frac{|\dot{w}|^2}{2} - V(t, v+w) + (f(t), w) \right] dt.$$

D'où, en utilisant (4),

$$(6) \quad \varphi(u + \tau_i e_i) = \varphi(v + \tau_i e_i + w) = \varphi(u).$$

On déduit de (4) que V est majorée par une constante c . Dès lors

$$\varphi(u) \geq \frac{|\dot{w}|^2}{2} - \|f\|_{L^2} \|w\|_{L^2} - cT.$$

L'inégalité de Wirtinger entraîne que

$$(7) \quad \varphi(u) \rightarrow \infty, \quad \|w\|_H \rightarrow \infty.$$

Soit (u_n) une suite minimisante pour φ . Grâce à (6), on peut supposer que $(v_n, e_1) \in [0, \tau_1]$. D'après (7), (w_n) est bornée dans H . Finalement (u_n) est bornée dans H . La fonction φ atteint donc son infimum. $\square$

Remarques :

- 1) On ne suppose aucune relation entre $T, \tau_1, \dots, \tau_n$.
- 2) L'hypothèse (4) est vérifiée en particulier lorsque $V \equiv 0$. Dans ce cas la condition (5) est également nécessaire pour l'existence d'une solution T -périodique.

On déduit immédiatement du théorème 1 le résultat suivant :

Exemple 1 : Si $f \in L^2$ et si $\int_0^T f = 0$, alors l'équation (3) admet une solution T -périodique faible qui minimise φ sur H .

Si f est impaire, l'existence d'oscillations impaires de (3) résulte d'un théorème de Mawhin ([10]) qui s'applique aussi au cas dissipatif. Nous allons donner une extension de ce théorème dans le cas variationnel.

On note Z l'ensemble des fonctions impaires de H . Comme $Z \subset Y$ l'inégalité de Wirtinger est vérifiée dans Z . L'espace Z muni de la norme induite est réflexif car c'est un sous-espace fermé de H .

Théorème 2 : Soient V et f vérifiant les hypothèses de la section 1. Si, $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}^n$,

$$(8) \quad D_u V(-t, -u) = -D_u V(t, u) \text{ et } f(-t) = -f(t) \quad \text{p.p.}$$

et s'il existe $k \in]0, 4\pi^2/T^2[$ et $c > 0$ tels que

$$(9) \quad V(t, u) \leq k \frac{|u|^2}{2} + c,$$

alors le système (2) admet une solution T -périodique faible impaire qui minimise φ sur Z . Si, de plus,

$$(10) \quad u_1 \neq u_2 \Rightarrow (D_u V(t, u_1) - D_u V(t, u_2), u_1 - u_2) < \frac{4\pi^2}{T^2} |u_1 - u_2|^2,$$

il existe une seule solution T -périodique faible impaire.

Démonstration : Soit $u \in Z$. On déduit de (9) que

$$\varphi(u) \geq \frac{|\dot{u}|^2}{2} \int_0^T dt - \frac{k}{2} |u|^2 \int_0^T dt - |f| \int_0^T |u| dt - cT.$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Wirtinger,

$$\varphi(u) \geq \left(1 - k \frac{T^2}{4\pi^2}\right) \frac{|\dot{u}|^2}{2} \int_0^T dt - c' |\dot{u}| \int_0^T dt - cT.$$

Par conséquent $\varphi(u) \rightarrow \infty, |u|_Z \rightarrow \infty$.

La restriction de φ à Z atteint donc son infimum en un point u . Si $h \in Z$, il vient

$$(11) \quad 0 = \langle D\varphi(u), h \rangle_{H^*, H} = \int_0^T [(\dot{u}, \dot{h}) - (D_u V(t, u), h) + (f, h)] dt.$$

En utilisant l'impairité de u et l'hypothèse (8), on vérifie facilement (11) lorsque $h \in H$ est paire. La fonction u est donc une solution faible de (2).

Sous l'hypothèse (10) il vient, pour $u_1 \neq u_2$,

$$\begin{aligned} & \langle D\varphi(u_1) - D\varphi(u_2), u_1 - u_2 \rangle_{H^*, H} \\ &= \int_0^T [|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|^2 - (D_u V(t, u_1) - D_u V(t, u_2), u_1 - u_2)] dt \\ &> \int_0^T \left(|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|^2 - \frac{4\pi^2}{T^2} |u_1 - u_2|^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est positive en vertu de l'inégalité de Wirtinger. D'où l'unicité. $\square$

Exemple 2 : Si $f \in L^2$ est impaire, l'équation (3) admet une solution T -périodique faible impaire qui minimise φ sur Z .

Remarques :

- 1) Comme l'équation $\ddot{u} + u = \sin t$ n'admet pas de solution 2π -périodique, on ne peut améliorer la majoration de k dans le théorème 2.
- 2) Les arguments des théorèmes 1 et 2 ne s'appliquent pas qu'aux problèmes périodiques. En particulier, on peut imposer des conditions de Neumann $\dot{u}(0) = \dot{u}(T) = 0$ etc.
- 3) Dans le cas de l'équation du pendule autonome $\ddot{u} + \sin u = 0$, l'exemple 1 fournit les solutions "périodiques" $(2k+1)\pi$ qui sont "physiquement instables" alors que l'exemple 2 fournit la solution "physiquement stable". Cette remarque sera développée dans la section suivante.

3 - INSTABILITE DES SOLUTIONS PERIODIQUES :

On considère le cas d'une équation ($n=1$). Outre les hypothèses de la section 1 sur V et f , on suppose V deux fois dérivable en u et $D_u^2 V$ continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dans ce cas φ est deux fois dérivable et

$$\langle D^2 \varphi(u)h, h \rangle_{H, H} = \int_0^T [\dot{h}^2 - D_u^2 V(t, u)h^2] dt.$$

Si u est une solution T -périodique faible de (2), on appelle équation aux variations associée à u l'équation

$$(12) \quad \ddot{h} + D_u^2 V(t, u(t))h = 0.$$

Comme $D_u^2 V(t, u(t))$ est continue et T -périodique, l'équation (12) est une équation de Hill.

On dit qu'une solution T -périodique faible u de (2) est instable lorsque l'équation aux variations associée à u admet des solutions non bornées.

Théorème 3 : Tout minimum local de φ correspond à une solution instable de (2).

Démonstration : Si φ admet un minimum local en u , il vient, pour tout $h \in H$,

$$(13) \quad \int_0^T [\dot{h}^2 - D_u^2 V(t, u)h^2] dt \geq 0.$$

Soit λ_0 la plus petite valeur propre de l'opérateur A défini par

$$D(A) = \{u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : u \text{ est } T\text{-périodique}\},$$

$$Au = -\ddot{h} - D_u^2 V(t, u(t))h.$$

L'inégalité (13) entraîne que $\lambda_0 \geq 0$. On déduit alors du théorème 2.1 de [9] que (12) admet des solutions non bornées. $\square$

Corollaire 1 : Si $D_u V(t, u)$ est décroissante en u , toutes les solutions T -périodiques faibles de (2) sont instables.

Démonstration : Par hypothèse $-V(t, u)$ est convexe en u . Donc φ elle-même est convexe. Par conséquent la seule valeur critique possible est l'infimum de φ s'il est fini. $\square$

Corollaire 2 : On suppose $f \equiv 0$. S'il existe $R > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ tels que, $\forall t$, $u \in \mathbb{R}$,

$$|u - u_0| < R \Rightarrow V(t, u) \leq V(t, u_0),$$

alors la fonction constante u_0 est une solution instable de

$$\ddot{u} + D_u V(t, u) = 0.$$

Démonstration : On vérifie facilement que $\varphi(u_0)$ est un minimum local de φ . $\square$

4 - OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES CONSERVATIFS :

Si V est pair, DV est impaire et le système

$$(14) \quad \ddot{u} + DV(u) = 0$$

admet la solution triviale $u \equiv 0$ qui est impaire et T -périodique pour tout $T > 0$.

Sous des hypothèses dues à Clarke et Ekeland (croissance de V "rapide" à l'origine et "lente" à l'infini), nous obtenons l'existence d'oscillations impaires non triviales (et donc non constantes).

L'approche de [7] se fonde sur la convexité du potentiel et un principe de moindre action dual. Nous utilisons la parité de V et le principe de moindre action. Comme dans [7] on obtient des oscillations dont la période minimale est fixée, et ce pour la première fois, semble-t-il, lorsque le potentiel n'est pas nécessairement convexe.

Théorème 4 : Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire continûment dérivable. On suppose, sans perte de généralité, que $V(0) = 0$. S'il existe $k, c \geq 0$, $\eta, \delta > 0$ tels que $k < 4\pi^2/T^2 < \eta$ et, $\forall u \in \mathbb{R}^n$,

$$(15) \quad V(u) \leq k \frac{|u|^2}{2} + c,$$

$$(16) \quad |u| \leq \delta \Rightarrow V(u) \geq \eta \frac{|u|^2}{2},$$

alors le système (14) admet une solution périodique impaire de période minimale T qui minimise φ sur Z .

Démonstration : Grâce à (15), on déduit du théorème 2 que (14) admet une solution T -périodique impaire u qui minimise φ sur Z .

Si $h(t) = \left(\delta \sin \frac{2\pi}{T} t \right) e$, où e est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1, on déduit de (16) que

$$\varphi(u) \leq \varphi(h) \leq \int_0^T \left[\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\delta^2}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{T} t \right)^2 - \eta \frac{\delta^2}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{T} t \right)^2 \right] dt < 0 = \varphi(0).$$

Donc u est une solution non triviale.

Si T n'est pas la période minimale de u , u est T/k périodique pour un entier $k \geq 2$. Comme dans [7] on pose $\tilde{u}(t) = u(t/k)$. Alors $\tilde{u} \in Z$ et

$$\varphi(\tilde{u}) = \frac{1}{k^2} \int_0^T \frac{|\dot{\tilde{u}}|^2}{2} - \int_0^T V(u) = \varphi(u) + \frac{1-k^2}{k^2} \int_0^T \frac{|\dot{u}|^2}{2} < \varphi(u).$$

Ce qui est absurde. $\square$

Exemple 3 : L'équation $\ddot{u} + \sin u = 0$ admet une oscillation impaire de période minimale T si et seulement si $T > 2\pi$. Cette oscillation minimise φ sur Z .

Démonstration : Comme

$$u_1 \neq u_2 \Rightarrow \frac{\sin u_1 - \sin u_2}{u_1 - u_2} < 1,$$

la condition est nécessaire en vertu du théorème 2.

Montrons qu'elle est suffisante. Le potentiel est donné par $V(u) = 1 - \cos u$. On vérifie (15) avec $k = 0$. Comme $V(u)/u^2 \rightarrow 1/2$, $u \rightarrow 0$, on peut vérifier (16) avec $\eta > 4\pi^2/T^2$ lorsque $4\pi^2/T^2 < 1$. $\square$

Remarque : On peut évidemment construire les oscillations au moyen d'intégrales elliptiques.

Exemple 4 : Si $-1/2 < \alpha < 0$, alors, pour tout $T > 0$, le système

$$u + |u|^{2\alpha} u = 0$$

admet une oscillation impaire de période minimale T qui minimise φ sur Z .

Démonstration : le potentiel est donné par $V(u) = (2\alpha+2)^{-1} |u|^{2(\alpha+1)}$.

Dès lors $V(u)/|u|^2 \rightarrow 0$, $|u| \rightarrow \infty$, et $V(u)/|u|^2 \rightarrow \infty$, $|u| \rightarrow 0$, et il est facile de vérifier les hypothèses du théorème 4 pour tout $T > 0$. $\square$

Remarques :

- 1) Comme le potentiel est convexe, l'existence d'une oscillation de période minimale T résulte de [7].
- 2) L'exemple 4, qui concerne un système soumis à une force de rappel sous linéaire, offre un contraste frappant avec le cas linéaire ($\alpha = 0$) pour lequel toutes les solutions sont 2π -périodiques.

5 - LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION DUAL :

Nous allons obtenir des oscillations forcées qui ne correspondent pas à des minima globaux de l'action en utilisant le principe de moindre action dual de Clarke et Ekeland (voir [4], [7], [8] et les bibliographies de ces articles).

Théorème 5 : Soient V et f vérifiant les hypothèses de la section 1. S'il existe $k \in]0, 4\pi^2/T^2[$ et $c \geq 0$ tels que

$$(17) \quad V(t, u) \leq k \frac{|u|^2}{2} + c$$

et si

$$(18) \quad (D_u V(t, u_1) - D_u V(t, u_2), u_1 - u_2) \leq \frac{4\pi^2}{T^2} |u_1 - u_2|^2,$$

$$(19) \quad V(t, u) \rightarrow \infty, \quad |u| \rightarrow \infty, \quad \text{uniformément en } t,$$

$$(20) \quad \int_0^T f = 0,$$

alors le système (2) admet une solution T -périodique faible.

Notations : Par un changement de variable on se ramène au cas où $T = 2\pi$. Comme précédemment $L^2 = L^2(0, 2\pi; \mathbb{R}^n)$. On définit l'opérateur linéaire L par

$$D(L) = \{u \in L^2 : u \text{ et } \dot{u} \text{ sont absolument continues, } u(0) - u(2\pi) = \dot{u}(0) - \dot{u}(2\pi) = 0, u \in L^2\}$$

$$Lu = -\ddot{u} - u$$

et $\Psi : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Psi(u) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{|u|^2}{2} - V(t, u) + (f(t), u) \right] dt.$$

Grâce à (18) la fonction ψ est convexe et $\partial \psi(u) = u - D_U V(\cdot, u) + f$. Les solutions T-périodiques faibles de (2) sont les zéros de $L + \partial \psi$. L'espace L^2 est la somme orthogonale de l'image de L , $R(L)$, et du noyau de L , $\text{Ker } L$. On pose

$$K = (L|_{D(L)} \cap R(L))^{-1},$$

$$\psi^*(v) = \sup_{u \in L^2} [(v, u)_{L^2} - \psi(u)], \quad v \in L^2,$$

et

$$\phi(v) = \frac{1}{2} (Kv, v)_{L^2} + \psi^*(v), \quad v \in R(L).$$

La fonction ψ^* est la transformée de Fenchel de ψ et ϕ est l'"action duale". On déduit de (17) que ψ^* est partout finie. Chaque $v \in R(L)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $v_1 + v_2$ où v_1 est la valeur moyenne de v et v_2 est de moyenne nulle.

Démonstration : Par définition

$$(Kv, v)_{L^2} \geq -|v_1|_{L^2}^2$$

et

$$\psi^*(v) \geq \int_0^{2\pi} \left[\frac{|v|^2}{2} + V(t, v) - (f(t), v) \right] dt.$$

En utilisant (20), on obtient

$$(21) \quad \phi(v) \geq \frac{|v_2|^2}{2} L^2 + \int_0^{2\pi} V(t, v) dt - |f|_{L^2} |v_2|_{L^2}.$$

Comme V est bornée inférieurement grâce à (19), il vient

$$(22) \quad \phi(v) \geq \frac{|v_2|^2}{2} L^2 - 2\pi c' - |f|_{L^2} |v_2|_{L^2}.$$

Montrons que ϕ est coercive, i.e. $|v_n|_{L^2} \rightarrow \infty \Rightarrow \phi(v_n) \rightarrow \infty$. Si $|v_{2,n}|_{L^2} \rightarrow \infty$

on déduit immédiatement de (22) que $\phi(v_n) \rightarrow \infty$. On peut donc supposer que

$(v_{2,n})$ est bornée dans L^2 et que $|v_{1,n}| \rightarrow \infty$. Grâce à (21) il suffit de prouver que

$$(23) \quad \int_0^{2\pi} V(t, v_{1,n} + v_{2,n}) dt \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

L'argument suivant est classique. On pose

$$\Omega_n = \{t \in [0, 2\pi] : |v_{2,n}(t)| \geq \frac{1}{2} |v_{1,n}|\}.$$

Comme $\int_{\Omega_n} \frac{1}{n} |v_{1,n}|^2 \leq |v_{2,n}|_{L^2}^2 \leq c''$, il vient $\mu(\Omega_n) \leq 4c'' / |v_{1,n}|^2$.

Soit m tel que $n \geq m \Rightarrow \mu(\Omega_n) \geq \pi$. Sur Ω_n , $|v_n(t)| \geq |v_{1,n}| - |v_{2,n}(t)| \geq \frac{1}{2} |v_{1,n}|$. Si $n \geq m$,

$$\int_0^{2\pi} V(t, v_{1,n} + v_{2,n}) dt \geq -c' \pi + \int_{\Omega_n} V(t, v_{1,n} + v_{2,n}) dt.$$

En utilisant (19) on obtient (23).

L'application K étant compacte et la fonction ψ^* convexe et continue, ϕ est faiblement semi-continue inférieurement. Comme ϕ est coercive, elle atteint son infimum en un point v de $R(L)$.

Pour $h \in R(L)$ et pour $t \in]0, 1[$, on a

$$\psi^*(v) \leq \psi^*(v+th) + t(Kv, h)_{L^2} + \frac{t^2}{2} (Kh, h)_{L^2}.$$

Donc

$$-(Kv, h)_{L^2} \leq \frac{\psi^*(v+th) - \psi^*(v)}{t} + \frac{t}{2} (Kh, h)_{L^2}.$$

Si $t \downarrow 0$, on obtient

$$-(Kv, h)_{L^2} \leq \delta^+ \psi^*(v, h).$$

Comme $\delta^+ \psi^*(v, \cdot)$ est positivement homogène et sous-additive, le théorème de Hahn-Banach assure l'existence de $w \in \text{Ker } L$ tel que, pour tout $h \in L^2$,

$$(w, h)_{L^2} - (Kv, h)_{L^2} \leq \delta^+ \psi^*(v, h).$$

Mais alors

$$(w - Kv, h)_{L^2} \leq \psi^*(v+h) - \psi^*(v),$$

i.e. $w - Kv \in \partial \psi^*(v)$. Il vient $v = \partial \psi(w - Kv)$. Si $u = w - Kv$, $-Lu = v$ et u est un zéro de $L + \partial \psi$. $\square$

Remarques :

- 1) D'après la démonstration, tout minimum local de Φ correspond à un zéro de $L + \partial \Psi$.
- 2) On obtient d'une manière analogue un résultat semblable pour des systèmes hamiltoniens du premier ordre. On peut aussi traiter d'autres problèmes aux limites.
- 3) L'hypothèse (18) est superflue lorsque $D_u V$ est bornée [1], ou lorsque V est convexe en u [7], [8]. L'est-elle en général ?

Exemple 5 : On considère une équation de la forme

$$(24) \quad \ddot{u} + g(u) = h \in L^2(0, 2\pi; \mathbb{R})$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, admet des limites à l'infini et est telle que $g(-\infty) < g(u) < g(\infty)$, $\forall u$, et

$$u_1 \neq u_2 \Rightarrow \frac{g(u_1) - g(u_2)}{u_1 - u_2} \leq 1.$$

On pose $h_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h$ et $h_2 = h - h_1$. Il est clair que, si (24) admet une solution 2π -périodique,

$$(25) \quad g(-\infty) < h_1 < g(\infty).$$

En vue d'appliquer le théorème 5, on pose

$$V(t, u) = \int_0^u g(s) ds - h_1 \cdot u \quad \text{et} \quad f = h_2,$$

de sorte que (24) prend la forme (2). Comme (25) entraîne (19), cette condition suffit aussi à assurer l'existence d'une solution périodique (voir [3] et la bibliographie de cet article pour de nombreux développements liés à ce type de condition).

Remerciements :

Le Professeur J. ROBERT et les membres du Séminaire d'Analyse non Linéaire m'ont réservé un accueil chaleureux : je les en remercie vivement.

Je tiens aussi à remercier les Professeurs A. LAZER et J. MAWHIN de conversations aussi sympathiques qu'utiles au développement de ce travail.

•••

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENCI V. et RABINOWITZ P. :
Critical point theorems for indefinite functionals.
Inventiones Math. 52, (1979), p. 241-273.
- [2] BERGER M. :
"Nonlinearity and functional analysis. Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis".
Academic Press, New York, (1977).
- [3] BREZIS H. et NIRENBERG L. :
Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems.
Ann. Scuola Norm. Pisa 5, (1978), p. 225-326.
- [4] BREZIS H., CORON J.M. et NIRENBERG L. :
Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz.
Comm. Pure and Appl. math. 33, (1980), p. 667-689.
- [5] CASTRO A. :
Periodic solutions of the forced pendulum equation, in "Differential equations".
Academic Press, New York, (1980), p. 149-160.
- [6] CASTRO A. et LAZER A.C. :
Applications of a max-min principle.
Rev. Colombiana de Mat. 10, (1976), p. 141-149.
- [7] CLARKE F.H. et EKELAND I. :
Nonlinear oscillations and boundary value problems.
A paraitre. Arch. Rat. Mech. Anal.

- [8] EKELAND I. :
Oscillations de systèmes hamiltoniens non linéaires III, preprint.
- [9] MAGNUS W. et WINKLER S. :
"Hill's equation".
Dover, New York, (1979).
- [10] MAWHIN J. :
Une généralisation de théorèmes de J. A. Marlin.
Intern. J. Non-linear Mech. 5, (1970), p. 335-339.
- [11] MAWHIN J. :
Contractive mappings and periodically perturbed conservative systems.
Arch. Math. 12, (1976), p. 67-74.