GROUPES ET DYNAMIQUES.

Christian Bonatti

Abstract. Question: quels groupes agissent fidèlement sur $\mathbb{R}$ ou sur le cercle? Quel est la dynamique des actions de groupes? quelle est l'influence de la régularité (continuité, différentiabilité)?

Contents

1. Homéomorphismes croissants de $[0, 1]$ 1
2. Vocabulaire des actions de groupes 9
3. Exemples classiques 12
4. Groupes agissant sans points fixes: le théorème de Holder 17
5. Le théorème de Solodov 25
6. Homéomorphismes du cercle: la théorie de Poincaré 32
7. Minimaux 39
8. Un critère pour prouver qu'un groupe est libre: le ping-pong 47
9. Groupes libres engendrés par des homéomorphismes génériques 51
10. Groupe affine par morceau 53
11. Contrôle de distorsion 1: lemme de Kopell 55
12. Difféomorphismes du cercle: théorie de Denjoy 59
13. Problème 1 62
14. Problème 2 64
15. Problème 3 66
16. Problème 4 67

1. Homéomorphismes croissants de $[0, 1]$

Les *systèmes dynamiques* les plus simples sont certainement ceux engendrés par un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$. Le but de ce chapitre est tout d'abord de familiariser les étudiants à la problématique, à travers cet exemple simple. On y découvrira en particulier l'importance des domaines fondamentaux pour comprendre les classes de conjugaison d'homéomorphismes.

Afin d'amener la notion d'*action de groupe*, on considèrera en fin de chapitre les homéomorphismes qui commutent, et le centralisateur d'un homéomorphisme.

Quelques reflexions sur les problèmes de *conjugaison différentiable* des difféomorphismes et des *centralisateurs* C^r des difféomorphismes concluront ce chapitre.

1.1. **homéomorphismes.** Un *homéomorphisme* entre deux espaces métriques est une bijection continue dont l'inverse est continu.

Ici nous allons nous intéresser aux homéomorphismes de la droite, du cercle, de l'intervalle. Il y a de ce fait une structure supplémentaire, très liée à topologie, qui vient de l'ordre sur $\mathbb{R}$ (et induit un "ordre cyclique" sur le cercle).

Je vous laisse en exercice cette propriété importante que vous avez déjà certainement rencontrée dans vos études, quand vous avez vu la topologie de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. (1) *Une bijection croissante de entre deux intervalles I, J de $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme.*

(2) *Plus généralement, montrez qu' une bijection croissante entre deux fermés de $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme.*

(3) *Montrez à l'aide d'un exemple que cette propriété est fausse si X ou Y n'est pas fermé.*

1.2. **Limite des orbites.** Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ un homéomorphisme croissant de l'intervalle.

Pour tout $x \in [0,1]$ la suite $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite monotone. Elle est croissante si $f(x) > x$ et décroissante si $f(x) < x$, constante si $f(x) = x$. On dit alors que *x est un point fixe de f*.

La suite $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est *l'orbite* de x pour f. Les suites $\{f^n(x)\}_{n\geq 0}$ et $\{f^n(x)\}_{n\leq 0}$ sont les orbites *positive* et *negative* de x.

Rappelons que toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotone dans $[0,1]$ converge (vers sa borne suprieure si elle est croissante, vers sa borne inférieure si elle est decroissante). On note

$$\alpha(x) = \lim_{n\to-\infty} f^n(x) \text{ et } \omega(x) = \lim_{n\to+\infty} f^n(x).$$

On note $Fix(f)$ l'ensemble des point fixes de f. C'est un compact non vide.

Chaque composante connexe de $[0,1] \setminus Fix(f)$ est un intervalle ouvert dont l'adhérence I est invariante par f, c'est à dire que I vérifie $f(I) = I$.

Lemme 1.1. *Soit I l'adhérence d'une composante connexe de $[0,1] \setminus Fix(f)$. Alors tous les points de l'intérieurs de I ont les mêmes α et ω-limites, qui sont chacune l'une des extérmités de I. Plus précisément:*

- *si $f(x) > x$ pour $x \in Int(I)$ alors $\alpha(x) = \inf I$ et $\omega(x) = \sup I$*
- *si $f(x) < x$ pour $x \in Int(I)$ alors $\alpha(x) = \sup I$ et $\omega(x) = \inf I$.*

On voit bien que les orbites de f sont complètement décrites par la donnée:

- de l'ensemble des point fixes de f,
- et du signe de $f - id$ entre les points fixes.

On aimerait être plus précis. et définir le fait que deux homómorphismes ont même dynamique. Cela se fait à l'aide de la notion de *conjugaison*.

1.3. **Conjugaison.** Soit $f\colon X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique X et Y un autre espace métrique.

Soit $h\colon Y \to X$ un homéomorphisme. Alors l'application g définie par $g = h^{-1}fh$ est un homéomorphisme de Y. On dit que g est *le conjugué de f par h*. Nous allons voir que les dynamiques de f et de g sont similaires en beaucoup d'aspects.

Ceci provient de la relation élémentaire suivante:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad g^n = h^{-1}f^n h$$

En d'autres termes, tous les itérés de g sont les conjugués des itérés de f, par le même homéomorphisme $fh/$

On en déduit que l'image par h d'une orbite de g est exactement une orbite de f: plus précisément, soit y un point de Y et $x = h(y) \in X$ son image par h. Alors

$$g^n(y) = h^{-1}(f^n(x)).$$

Comme h est un homéomorphisme, il préserve également toutes les propriétés d'accumulation des orbites les unes sur les autres. Par exemple, pour tout $x \in X$, on note $\omega(x)$ (ou $\omega(x, f)$) l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'orbite positive de x. En formule:

$$\omega(x, f) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{f^n(x), n \geq N\}}.$$

Alors h preserve la notion d'ω-limite:

$$\forall y \in Y, \quad \omega(y, g) = h^{-1}(\omega(x, f))$$

.

Autre exemple: un point $y \in Y$ est un point fixe de g si et seulement si son image $x = h(y)$ est un point fixe de f.

On dit que deux homéomorphismes ont la même *dynamique topologique* s'ils sont conjugués par un homéomorphisme.

1.4. **Conjugaison des homéomorphismes de** $[0, 1]$ **sans points fixes dans** $]0, 1[$**.** Le lemme suivant donne une idée simple mais fondamentale en Système Dynamiques :

Lemme 1.2. *Soient $f: I \to I$ et $g: J \to J$ deux homéomorphismes croissants de deux segments I et J. On suppose que, $f(x) > x$ et $g(y) > y$ pour tous points $x \in Int(I)$ et $y \in Int(J)$. En particulier, les seuls points fixes de f et g sont les extremités des segments I et J, respectivement.*

Soit $x_0 \in int(I)$ et $y_0 \in int(J)$. Soit h_0 un homeomorphisme croissant de $[x_0, f(x_0)]$ sur $[y_0, g(y_0)]$. En particulier, on a

$$h(x_0) = x_0 \text{ et } h(f(x_0)) = g(y_0).$$

Alors h_0 se prolonge de façon unique en un homeomorphisme (croissant) $h: I \to J$ qui conjugue f et g:

$$g = hfh^{-1} \text{ et } h|_{[x_0, f(x_0]} = h_0.$$

Démonstration : On definit une application $\tilde{h}$ sur l'orbite de x_0 par la formule suivante:

$$\tilde{h}(f^n(x_0)) = g^n(y_0).$$

On remarque que $\tilde{h}$ conjugue les restrictions de f et de g aux orbites de x_0 et y_0, respectivement. De plus $\tilde{h}$ coincide avec h_0 aux points x_0 et $f(x_0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit alors une application h_n en tout point $z \in [f^n(x), f^{n+1}(x)]$ par la formule

$$h_n(z) = g^n(h_0(f^{-n}z))).$$

L'application ainsi définit est un homéomorphisme $h_n: [f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)] \to [g^n(y_0), g^{n+1}(y_0)]$ qui coincide avec $\tilde{h}$ aux points $f^n(x_0)$ et $f^{n+1}(x_0)$.

Remarquons que l'union $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)]$ est exactement l'intérieur du segment I; en effet l'orbite de x_0 est une suite monotone qui va d'une extrémité à l'autre du segment I.

On en déduit que les applications h_n se recollent en un homéomorphisme h de l'intérieur de I sur celui de J. On complete h aux extrémité de ces segments, l'image des bornes inférieures et supérieurs de I étant les bornes correspondantes de J.

On vérifie que h ainsi construite convient. De plus la formule définissant h_n est nécessairement vérifiée par h, ce qui prouve l'unicité de l'extension h de h_0. □

Dans le lemme ci-dessus on a supposé que f et g étaient supérieurs à l'identité, en dehors des extrémités de leurs domaines de définition respectifs. Bien sûr, le même énoncé reste valide si l'on suppose que f est g sont tous deux inférieurs à l'identité (en dehors des extrémités). Mais que se passe-t-il si l'un d'entre eux est supérieur à l'identité mais que l'autre est inférieur à l'identité ?

Dans ce cas un homéomorphisme de conjugaison h devra envoyer la borne inférieur de I sur la borne supérieure de J et la borne supérieure de I sur la borne inférieure de J, car h doit préserver les notions d'α-limite et d'ω-limite. Il faut donc que h inverse l'orientation! Modulo cette petite complication, l'énoncé reste identique:

Corollaire 1.1. *Soient $f\colon I \to I$ et $g\colon J \to J$ deux homéomorphismes croissants de deux segments I et J. On suppose que, $f(x) > x$ et $g(y) < y$ pour tous points $x \in Int(I)$ et $y \in Int(J)$.*

Soit $x_0 \in int(I)$ et $y_0 \in int(J)$. Soit $h_0\colon [x_0, f(x_0)] \to [g(y_0), y_0]$ un homeomorphisme décroissant; en particulier on a $h(x_0) = x_0$ et $h(f(x_0)) = g(y_0)$.

Alors h_0 se prolonge de façon unique en un homeomorphisme $h\colon I \to J$ qui conjugue f et g.

Remarque 1. *Sous les hypothèses du lemme, l'homéomorphisme h de conjugaison préserve l'orientation si $f(x) \geq x$ et $g(y) \geq y$, ou si $f(x) \leq x$ et $g(y) \leq y$.*

Par contre, l'homéomorphisme h inverse l'orientation si $f(x) \geq x$ et $g(y) \leq y$, ou si $f(x) \leq x$ et $g(y) \geq y$.

La clé de la démonstration du Lemme 1.2 est la remarque suivante:

Remarque 2. *Sous les hypothèses du lemme, chaque orbite de l'intérieur de I rencontre $[X, f(x)[$ exactement en un point.*

Un tel intervalle $[x, f(x)[$ est appelé un *Domaine fondamental* de f. Par abus de langage, on appelle aussi l'intervalle fermé $[x, f(x)]$ un domaine fondamental, bien que l'orbite de x rencontre ce segment en deux points.

Remarque 3.
(1) *L'énoncé du Lemme 1.2 parle de l'unicité de l'homéomorphisme de conjugaison h qui étend h_0. L'homéomorphisme de conjugaison enter f et g n' est par contre pas unique, puisque tout choix de l'homéomorphisme h_0 détermine un autre choix de l'homéomorphisme h !*
(2) *Par contre, si h_1 et h_2 sont deux homéomorphismes qui conjuguent f à g, alors $h_2^{-1}h_1$ est un homéomorphisme qui conjugue f à lui même. Autrement dit l'homéomorphisme $g = h_2^{-1}h_1$* commute avec *f, c'est à dire $fg = gf$. Cette idée sera reprise en détail quelques sections plus bas.*

Exercice 2. *Notons* $T_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la translation* $x \mapsto x + \alpha$ *et* $h_\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'homothetie* $x \mapsto \beta \cdot x$ *de rapport* β.

Montrez que pour tout $\alpha \neq 0$ *et pour tout* $\beta > 0$ *tel que* $\beta \neq 1$, *la restriction de* h_β *à* $]0, +\infty[$ *est conjuguée à* T_α.

Dire pour quelles valeurs de α *et* β *les homéomorphismes de conjugaison sont croissants.*

1.5. **Classes de conjugaison des homéomorphismes de** $[0,1]$**.** Nous pouvons à présent formaliser l'idée intuitive qui dit que la dynamique d'un homéomorphisme de l'intervalle est déterminé par l'ensemble des points fixes, et la direction "vers la droite ou vers la gauche" de la dynamique entre les points fixes successifs:

Théorème 1. *Soient* f *et* g *deux homéomorphismes croissants de* $[0,1]$. *On suppose qu'il existe un homéomorphisme croissant* h_0 *de* $Fix(f)$ *sur* $Fix(g)$.

Alors, h_0 *se prolonge en un homéomorphisme* $h \colon [0,1] \to [0,1]$ *conjugant* f *et* g *si et seulement si, pour tout* $x_1, x_2 \in Fixf$ *on a:*

$$(\forall z \in]x_1, x_2[, \quad f(z) > z) \Longleftrightarrow (\forall y \in]h_0(x_1), h_0(x_2)[, \quad g(z) > z)\,.$$

Démonstration : Le lemme permet de construire un homéomorphisme croissant de chaque composante connexe $]x_1, x_3[$ de $[0,1] \setminus Fixf$ sur $]h_0(x_1), h_0(x_2)[$ qui conjugue les restriction respectives de f et g à ces intervalles. L'union de ces homéomorphismes, et de h_0, est une bijection croissante, donc un homéomorphisme. □

Exercice 3.
(1) *Montrez que, pour tout* $n > 0$ *et tout* $f \in Homeo_+([0,1])$, f *et* f^n *sont conjugués par un homéomorphisme croissant.*
(2) *Montrez sur un exemple qu'il existe un homéomorphisme* $f \colon [0,1] \to [0,1]$ *tel que* f *et* f^{-n} *ne sont pas conjugués.*
(3) *Donnez un exemple où* f *et* f^{-1} *sont conjugués par un homéomorphisme croissant.*
(4) *Supposons que* $f \colon [0,1] \to [0,1]$ *est un homéomorphisme tel que* f *et* f^{-1} *sont conjugués par un homéomorphisme croissant. Que peut on dire sur le cardinal de* $Fixf$*?*

1.6. **Homéomorphismes qui commutent.** On dit que f et g *commutent* si $fg = gf$.

Remarque 4. *On peut ré-écrire la relation de commutation comme* $f = gfg^{-1}$. *Autrement dit* g *conjuge* f *avec lui même.*

De même, f *conjugue* g *à* g.

On en déduit:

- L'image par f d'une orbite de g est donc une orbite de g.
- En particulier si x est un point fixe de g alors $f(x)$ est un point fixe de g.
- De même,l'image par g d'un point fixe de f est un point fixe de f.

Autrement dit
$$f(Fixg) = Fixg \text{ et } g(Fixf) = Fixf.$$

Les homéomorphismes qui commutent avec f préservent toute la dynamique topologique de f. Il est naturel de se demander s'il existe beaucoup de tels homéomorphismes.

Voici un premier exemple trop élémentaire:

Exemple 1. *Pour tout homéomorphisme h d'un espace métrique, on appelle* support de h *et on note supp(h) l'adhérence de l'ensemble des points x tels que $h(x) \neq x$. Autrement dit*

$$supp(h) = X \setminus Int(Fix(h)).$$

Si f et g sont deux homéorphismes de supports disjoints alors ils commuttent :

$$supp(f) \cap supp(g) = \emptyset \Longrightarrow fg = gf$$

Exercice 4. *Notons $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $x \mapsto x + sinx$.*

- *Montrez que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.*
- *Montrez qu'il commute avec la translation $T_{2\pi}$.*
- *Déterminez $Fix(f)$*
- *Quelles sont les valeurs de α telles que T_α commute avec f?*

1.7. **Centralisateur.** Le centralisateur $C_0(f)$ d'un homéomorphisme est l'ensemble des homeomorphisme qui commute avec lui.

Remarque 5. (1) *Le centralisateur $C_0(f)$ un sous groupe de $Homeo([0,1])$: en effet*
- *si $g, h \in C_0(f)$ alors $fgh = gfh = ghf$ ce qui montre que $gh \in C_0(f)$.*
- *si $g \in C_0(f)$ alors $g^{-1} \in C_0(f)$ ($gf = fg \Longleftrightarrow fg^{-1} = g^{-1}f$).*

(2) *De plus $C_0(f)$ contient le groupe $\langle f \rangle = \{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ engendré par f.*
On dit que $C_0(f)$ est trivial si $C_0(f) =< f >$.

Corollaire 1.2. *Le centralisateur d'un homeomorphisme de* $[0,1]$ *n'est jamais trivial.*

Démonstration : Si $Fix(f)$ est d'intérieur non vide alors il contient un intervalle ouver $I \neq \emptyset$. D'après l'exemple 1, tout homéomorphisme à support dans I commute avec f, et n'appartient pas à $< f >$.

Considérons à présent un point x tel que $f(x) \neq x$. Supposons $f(x) > x$ pour fixer les idées (le cas $f(x) < x$ se traite de façon identique). Notons $a = \alpha(x,f)$ et $b = \omega(x,f)$ les limtes des orbites positives et négative de x. Le Lemme 1.2 implique que tout homéomorphisme g_0 de $[x, f(x)]$ fixant x et $f(x)$ se prolonge en un homéomorphisme g_1 de $[a,b]$ preservant l'orientation et commutant avec f. Comme $g_1(a) = a$ et $g_1(b) = b$, on peut prolonger g_1 en un homéomorphisme g de $[0,1]$ égal à l'identité hors de $[a,b]$ et coincidant avec g_1 sur $[a,b]$. On en déduit que g est un homéomorphisme de $[0,1]$ qui commute avec f.

Finalement, si l'on a choisit g_0 différent de l'identité, alors g admet x et $f(x)$ comme points fixes mais est different de l'identité: on en déduit que g n'est pas une puissance de f, donc $g \notin < f >$. □

La preuve du corollaire à montré beaucoup plus que ce qui était annoncé: en effet nous avons vu que pour tout $f \in Homeo_+([0,1])$ il existe un intervalle ouvert non vide I tel que tout homéomorphisme g_0 à support dans I se prolonge en un homéomorphisme qui commute avec f. Ce prouve que le centralisateur de f est un très gros groupe: en particulier:

Exercice 5. *Montrer que le centralisateur n'est jamais commutatif: pour tout homéomorphisme croissant f de* $[0,1]$ *il existe g, h qui commutent avec f mais ne commutent pas entre eux.*

Indication: *choisir un domaine fondamental I de f. Choisir deux homéomorphismesh_0 et g_0 de I tels que $h_0(Fix(g_0) \neq Fix(g_0)$. Notez $h, g \in C^0(f)$ les uniques extension de h_0 et g_0 qui commutent avec f. Montrez que g et h ne commutent pas.*

1.8. **Difféomorphismes.** Une application $f\colon [0,1] \to [0,1]$ est un *difféomorphisme de classe C^r*, $r \geq 1$ si f est de classe C^r, f est bijective et f^{-1} est de classe C^r.

Remarque 6. *Pour qu'un homéomorphisme $f\colon [0,1] \to [0,1]$ soit un difféomorphisme, il suffit que f soit de classe C^r et que sa différentielle Df ne s'annulle pas:*

$$\forall x \in [0,1], Df(x) \neq 0.$$

Quand on considère des difféomorphismes de classe C^r qui sont conjugués, il semblerait naturel de demander que la conjugaison soit aussi de classe C^r. De même il est naturel de considérer le centralisateur $C_r(f)$.

Ce centralisateur $C_r(f)$ fait encore l'objet de recherches: j'ai vu récemment passer un article, pas encore publié, qui cherche èxhiber un exemple de difféomorphisme f du cercle S^1 où $C_r(f)$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$ mais n'est pas $\mathbb{R}$.

Il existe des difféomorphismes C^r dont le centralisateur C^1 est trivial. L'exploration de ce sujet est l'un des thèmes possibles de ce cours, et aussi un thème de recherche possible après ce cours.

Aujourd'hui, dans ce chapitre d'introduction, je ne veux dire que des choses faciles. Voici une simple observation qui illustre la rigidité du centralisateur $C_r(f)$ pour $r > 1$.

Proposition 1.1. *Fixons $a > 1$ et soit $f\colon [0, +\infty \to [0, +\infty[$ l'homothétie $x \mapsto ax$ (c'est un difféomorphisme). Soit $g\colon [0, +\infty \to [0, +\infty[$ un homéomorphisme. On suppose que*

- *g commute avec f;*
- *g est dérivable en 0.*

Alors g est une homothétie.

Démonstration : On remarque que, pour tout $x > 0$, si $g(x) = y$ alors $g(\alpha^n x) = \alpha^n y$. Notons $x_i = \alpha^i x$. On a donc $\frac{g(x_i)}{x_i} = \frac{y}{x}$. Pour $i \to -\infty$ on a $x_i \to 0$. Donc

$$\lim_{i \to -\infty} \frac{g(x_i)}{x_i} = Dg(0).$$

On a montré

$$\frac{g(x)}{x} = Dg(0), \text{ pour tout } x > 0.$$

Donc g est l'homothétie de rapport $Dg(0)$ ce qui conclut. □

Exercice 6. *Soient f et g deux difféomorphismes croissants de $[0,1]$, et x un point fixe de f. On suppose que g est conjugué à f par un difémorphismes h. Montrer que $y = h(x)$ est un point fixe de g tel que $DF(x) = Dg(y)$.*

En déduire que, si $f \in Diff^1_+([0,1]$ possède un point fixe x tel que $Df(x) > 1$, alors pour tout $n > 1$, f n'est pas différentiablement conjugué à f^n.

Indication: *On raisonne par l'absurde, en supposant que g est un difféomorphisme conjugant f à f^n, $n > 1$.*

- *Montrez qu'il existe un point x_0 qui réalise le maximum de $Df(x)$ pour $x \in Fix(f)$.*

- *Calculez* $Df^n(x_0)$ *et montrez* $Df^n(x_0) > Df(x_0)$.
- *Soit* $y_0 = g^{-1}(x_0)$. *Montrez que* y_0 *est un point fixe de* f.
- *Calculez* $Df(y_0)$. *Montrez* $Df(y_0) > Df(x_0)$. *En deduisez la contradiction qui conclut.*

2. Vocabulaire des actions de groupes

2.1. **action de groupes: définitions.** Soit X un ensemble. On note $\mathrm{Bij}(X)$ l'ensemble des bijections de X. La loi de composition induit une structure de groupe sur $\mathrm{Bij}(X)$. Soit$G$ un groupe, dont la loi est noté multiplicativement. Je noterai 1_G ou G lélément neutre de G.

Une *action de G sur X* est une application

$$\Phi : G \times X \to X(g,x) \mapsto g(x)$$

telle que $1_G(x) = x$ pour tout x, et $(g_1g_2)(x) = g_1(g_2(x))$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ et tout point $x \in X$.

Remarque 7. (1) *Si Φ est une action de G sur X alors, pour tout $g \in G$ l'application $\varphi(g)\colon X \to X$ $x \mapsto g(x)$ est une bijection de X, et l'application qui à g associe cette bijection $\varphi(g)$ est un morphisme de G dans le groupe des bijections* $\mathrm{Bij}(X)$.
(2) *Réciproquement, si $\varphi\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ est un morphisme de groupe, alors l'application $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g(x) = (\varphi(g))(x)$ est une action de G sur X.*

En d'autre termes, la donné d'une action *du groupe G sur X est équivalente à la donnée d'un homomorphisme φ du groupe G sur le groupe des bijections de X. On notera $g(x) = \varphi(g)(x)$.*

On dit qu'une action de G sur X, associée à un morphisme est *fidèle* si φ est injective: autrement dit pour tout $g \neq 1$ il existe $x \in X$ tel que $g.x \neq x$.

Exemple 2. (1) *si $G \subset \mathrm{Bij}(X)$ est un sous-groupe de X alors* l'action naturelle *de G sur X est celle induite par le morphisme d'inclusion de G dans* $\mathrm{Bij}(X)$.
(2) *toute bijection f de X induit une action de $\mathbb{Z}$. Cette action est fidèle sauf si f est périodique (i.e. il existe $n > 0$ tel que $f^n = id_X$. Elle induit alors une action fidèle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).*
(3) *Plus généralement, si $\varphi\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ est une action, elle induit une action fidèle de $G/Ker\varphi$.*
(4) *Si f et g sont deux bijections de X qui commutent, elles induisent une action de $\mathbb{Z}^2$ sur X.*
(5) *si G est un groupe, l'application $G \times G \to G$ $(g,h) \mapsto g \cdot h$ est une action de G sur G (par* multiplication à gauche*).*

Exercice 7. *Soit $\varphi_{\alpha,\beta}$ le morphisme de $\mathbb{Z}^2$ dans le groupe de translation de $\mathbb{R}$ défini par $\varphi_{\alpha,\beta}(n,m) = t_{n\alpha+m\beta}\colon x \mapsto x + n\alpha + m\beta$.*

A quelle condition l'action engendrée par $\varphi_{\alpha,\beta}$ est elle fidèle?

Le *stabilisateur* de x est l'ensemble de $g \in G$ tels que $g(x) = x$.

Remarque 8. (1) *Le stabilisateur de x est un sous-groupe de G.*
(2) *Le stabilisateur du point $g(x)$ est le conjugue par g du stabilisateur du point x. En formule cela donne:*

$$Stab(g(x)) = gStab(x)g^{-1}$$

.

On dit qu'une action est *libre* si, pour tout x, le stabilisateur de x est $\varphi(1_G)$. Autrement dit, pour tout $g \neq 1_G$ la bijection $\varphi(g)$ n'a pas de point fixe.

Exercice 8. *Montrez que si G est un groupe, alors l'action de G sur G par multiplication à gauche est une action libre.*

Exercice 9. *Soit G un groupe et $\varphi\colon G \to (\mathrm{Bij})(\mathrm{G})$ définit par $\varphi(g)\colon h \to ghg^{-1}$.*

(1) *Montrez que φ induit un homomorphisme de G dans $Hom(G)$ et donc une action de G sur G dite* par conjugaison.
(2) *A quelle condition sur G cette action est elle fidèle?*
(3) *Montrez que cette action n'est jamais libre. Quel est le stabilisteur de $g \in G$?*

2.2. **Action sur un espace topologique.** Si X est un espace topologique, on parle d'action de groupe *continue* si $\varphi(G) \subset Homeo(X)$, c'est à dire si pour tout $g \in G$ la bijection $x \mapsto g(x)$ est un homéomorphisme de X.

Si X est une variété différentiable de classe C^r, on parle d'action *de classe C^r* si $\varphi(G) \subset Diff^r(X)$.

Le but de ce cours est de comprendre quels groupes agissent fidèlement, continûment ou différentiablement sur la droite $\mathbb{R}$, le cercle S^1, le segment $[0,1]$ ou l'intervalle semi ouvert $[0,+\infty[$.

2.3. **Orbites, ensembles invariants, ensembles minimaux.** Pour tout $x \in X$ on appelle orbite de x et on note $G.x$ l'ensemble des images de x par l'action des élément de G:

$$G.x = \{g(x), g \in G\}.$$

On dit qu'une partie $Y \subset X$ est invariante sous l'action de G si, pour tout $x \in Y$, l'orbite $G.x$ est contenue dans Y.

Remarque 9. *Si G est une action continue et si Y est un ensemble invariant, alors l'adhérence $\overline{Y}$ et l'intérieur $Int(Y)$ sont invariants.*

Soit $G \times X \to X$ une action continue, et Y une partie de X On dit que Y est *un minimal pour l'action de G* si:

- Y est fermé
- Y est invariant par l'action de G
- Les orbites des points de Y sont denses dans Y: pour tout $x \in Y$ on a $\overline{G.x} = Y$.

Lemme 2.1. *X espace métrique compact. Toute action continue $G \times X \to X$ admet un compact minimal invariant. Plus précisément l'adhérence de toute orbite contient un minimal.*

Démonstration : On considère l'ensemble $\mathcal{K}_x$ des compacts invariants contenus dans $\overline{G.x}$, muni de la relation d'ordre $\subset$. Alors $(\mathcal{K}_x, \subset)$ est inductif: toute famille $\{K_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ totalement ordonnée admet un minorant $\bigcap_{i\in\mathcal{E}} K_i$. Le Lemme de Zorn assure alors que $\mathcal{K}_x$ contient un élément minimal K. Si $y \in K$ alors $\overline{G.y} \subset K$ est un compact invariant plus petit que K donc égal à K. Donc K est un minimal pour l'action de G.

$\square$

Remarque 10. *Attention! Il existe des actions par diffeomorphismes sur $\mathbb{R}$ qui sont sans minimal. On en construira dans le chapitre sur les minimaux (Voir la Section 7.3).*

Une action de G sur X est dite *minimale* si X est un minimal (il est alors le seul minimal). Autrement dit toute orbite de G est dense dans X.

2.4. **Action conjuguées.** Si X et Y sont deux espace topologiques et que $h\colon X \to Y$ est un homémorphisme, alors l'application $\psi_h\colon f \mapsto hfh^{-1}$ induit un isomorphisme de $Home(X)$ sur $Homeo(Y)$.

Alors pour tout groupe G, à toute action de G sur X engendr'é par un morphisme $\varphi\colon G \to Homeo(X)$ on associe naturellement une action de G sur Y engendrée par $\psi_h \circ \varphi$.

On dit que ces deux actions sont *conjuguées*.

Comme precedemment, h envoie orbite sur orbite $h(orb(x)) = orb(h(x))$. L'image d'un minimal est un minimal, le stabilisteur de x et de $h(x)$ sont les memes, etc...

3. Exemples classiques

3.1. **La droite et le cercle.** Cette année je vais considérer des actions de groupes en dimension 1, donc sur les deux variétés connexes, à base dénombrable[1], de dimension 1: la droite réelle $\mathbb{R}$ et le cercle S^1.

On note $Homeo(\mathbb{R})$, $Homeo_+(\mathbb{R})$,$Homeo(S^1)$, $Homeo_+(S^1)$, $Diff^r(\mathbb{R})$, $Diff^r_+(\mathbb{R})$,$Diff^r(S^1)$, $Diff^r_+(S^1)$ les ensembles d'homeomorphismes, difféomorphismes de classe C^r préservant ou pas l'orientation.

On considèrera également les homéomorphismes et difféomorphismes du segment $[0,1]$, ou de la demi-droite $[0,1[$.

3.2. **Le cercle: plusieurs modèles.** Le cercle S^1 peut être vu de beaucoup de façon:

- c'est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{C}$.
- C'est le quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $x \simeq x+1$. On passe de l'une à l'autre de ces interprétations par

  $$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \mathbb{R} & \to & S^1 \subset \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{2i\pi t}. \end{array}$$

  C'est une application qui est localement un homéomorphisme. Cependant les points de S^1 on plusieurs préimages. Plus précisément deux points ont la même image si et seulement s'ils diffèrent d'un entier.

  Cette application induit donc une bijection continue de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur S^1, c'est donc un homéomorphisme.

  La projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un revêtement: La droite est donc *le revêtement universel* du cercle.

  Ceci définit aussi la structure différentiable du cercle: en effet une application $\varphi\colon S^1 \to \mathbb{R}$ est dérivable si $\varphi \circ \pi$ est derivable.
- C'est le quotient de $[0,1]$ par l'itentification de 0 avec 1. Cette identification est un espace métrique: $d(t_1,t_2) = \inf\{|t_2-t_1|, t_1+1-t_2, t_2+1-t_1\}$. La projection π de $\mathbb{R}$ sur S^1, en restriction à $[0,1]$, induit une bijection continue de $[0,1]/0 \simeq 1$ sur S^1, donc un homéomorphisme.
- C'est aussi la compactification de $\mathbb{R}$ par 1 point à l'infini. En effet, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\setminus\{[0]\}$ est le quotient par $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, donc d'une union disjointe des intervalles $]n,n+1[, n \in \mathbb{Z}$. C'est donc le quotient de $]0,1[\times\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}$. Finalement, ce quotient est $]0,1[$.

  Cependant l'application $t \mapsto \tan(\pi t)$ est un difféomorphisme de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

  Donc S^1 privé d'un point est l'intervalle ouvert donc est $\mathbb{R}$.
- C'est aussi $\mathbb{RP}^1$, l'espace des droites de $\mathbb{R}^2$. Comment voir cela?:

  A toute droite D de $\mathbb{R}^2$ on associe $\frac{1}{2\pi}\angle(D,D_0)$, où $\angle(D,D_0)$ est l'angle que fait D avec l'axe de x. Cet angle est bien déterminé *modulo* π: les droite associées à l'angle α ou à l'angle $\alpha+\pi$ sont égale.

  Ceci définit un homéomorphisme de l'espace des droites de $\mathbb{R}^2$ (appelé *espace projectif de dimension* 1 et noté $\mathbb{RP}^1$) sur S^1.

[1]pour ceux que cela intéresse, il existe aussi une variété de dimension 1 qui n'est pas à base dénombrable, et qu'on appelle *la grande droite*

- (juste pour achever de vous troubler complètement!) c'est aussi l' espace des demi-droite de $\mathbb{R}^2$: en effet une demi droite de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $]0, +\infty[.e^{2i\pi t}$. Une autre faon de dire les chose est de voir que toute demi droite coupe le cercle unite en un et un seul point: l'application qui à toute demi-droite associe son point d'intersection avec le cercle est l 'homéomorphisme annoncé.

3.3. **Exemples sur la droite.**

(1) Le groupe des translations de $\mathbb{R}$: $x \mapsto \tau_\alpha(x) = x + \alpha$.
(2) Le groupe des homothéties de $\mathbb{R}$: $x \mapsto h_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ pour $\alpha \neq 0$.
   Ces deux groupes sont respectivement isomorphes à $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, x)$. En particulier ce sont des groupes abéliens.
(3) Le groupe affine $A(1, \mathbb{R})$ des applications affines de la droite réelle, de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$. Remarquez qu'il est engendré par les homothéties et par les translations.
   On a de plus la relation $h_\alpha \tau_\beta h_\alpha^- 1 = \tau_{\alpha\beta}$. En effet $x \mapsto \alpha(\alpha^{-1}x + \beta) = x + \alpha\beta$.

Proposition 3.1. *Montrez qu'un sous-groupe G du groupe des translations est ou-bien* monogène *(c'est à dire, engendré par une unique translation) ou bien toutes les orbites sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Cela vient de la propriété classique suivante:

Lemme 3.1. *Tout sous groupe G de $\mathbb{R}, +$ est ou bien monogène, ou bien dense dans $\mathbb{R}$. .*

Pour prouver le lemme on considère $a = \inf G \cap]0, +\infty[$

- Si $a = 0$ alors il existe des éléments x_ε dans G dans $]0, \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$ on choisit ε et $x \in U$ tel que $[x, x + \varepsilon] \subset U$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nx_\varepsilon \in [x, x + \varepsilon]$ ce qui montre que $G \cap U \neq \emptyset$.
- Si $a > 0$ alors $]a, 2, a[$ ne contient pas délément y de G sinon G contiendrait des élément aussi proche que l'on veut de $y - a < a$, ce qui contredirait la définition de a. Donc $a \in G$ et $G = \mathbb{Z}a$.

On conclut la démonstration de la proposition: si G n'et pas monogène, il est dense dans $\mathbb{R}$ et alors pour tout x l'orbite de x par les translation $T_\alpha, \alpha \in G$ est l'ensemble des points $x + \alpha, \alpha \in G$. C'est donc l'image de G par la translation T_x. Comme G est dense dans $\mathbb{R}$, l'orbite de x aussi. □

3.4. **Le groupe affine.** Le but de cette section et de résoudre le probème suivant:

Problème 1. *Déterminer tous les sous-groupes de $A_+(\mathbb{R}, 1)$ dont l'action ne soit pas minimale (toute orbite dense)*

Voici des indications pour ce problème.

Soit $f\colon x \mapsto ax + b$. Alors pour toute translation T_α la conjuguée $fT_\alpha f^{-1}$ est la translation $T_{a\alpha}$.

Soit $f\colon x \mapsto ax+b$ et $g\colon cx+d$ tels que $a \neq 1$, $c \neq 1$. Alors $fgf^{-1}g^{-1}$ est une translation de vecteur $u = b - d + da - bc$. f et g on chacune un unique point fixe $\frac{b}{1-a}$ et $\frac{d}{1-c}$. Alors $Fixf \neq Fixg$ est équivalent à $u \neq 0$.

Soit G un sous groupe de $A(\mathbb{R}, 1)$.

- Si G contient une translation T_α et une application affine $f \mapsto ax+b$ avec $|a| \neq 1$, alors G contient des translations de pas arbitrairement petits: l'action est donc minimale.
- Si G contient deux applications affines $f\colon x \mapsto ax+b$ et $g\colon cx+d$ telles que $|a| \neq 1$, $c \neq 1$ et telles que $fix(f) \neq fix(g)$. Alors G contient aussi une translation, et l'action est minimale.
- Donc, si l'action de G n'est pas minimale et que G contient $f\colon x \mapsto ax+b$ avec $|a| \neq 1$, alors $fix(f)$ est un point fixe commun à tous les éléments de G: G est donc conjugué, par une translation, à un groupe d'homothetie. Il est discret si et seulement si ce groupe d'homotheties est monogènes (cas ou $G \subset Aff_+(\mathbb{R})$, ou est le produit d'un groupe monogène par un élement d'ordre 2 (la symetrie $x \mapsto -x$.
- Si l'action est minimale et si G ne contient pas de $f\colon x \mapsto ax+b$ avec $|a| \neq 1$. Si $G \subset Aff_+(\mathbb{R})$ c'est alors un groupe de translation, il n'est pas minimale si et seulement si il est monogène. Dans l'antre cas, G est ou bien engendré juste par une symetrie (conjuguée à $x \mapsto -x$), ou par cette symetrie et une translation.

Exercice 10. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ trouvez une action fidèle du groupe $< a, b | aba^{-1} = b^n >$.*

3.5. **Exemples sur le cercle.**

3.5.1. *Dynamiques des rotations.* On considère le cercle comme étant $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Les translations $x \mapsto x+\alpha$ passent au quoitent sur cercle en des rotations (c'est la rotation usuelle $e^{2i\pi x} \mapsto e^{2i\pi x+\alpha}$ d'angle $2\pi\alpha$.

Si $\alpha = \frac{p}{q}$ appartient à $\mathbb{Q}$ alors toute orbite est périodique de période q. Si α est irrationnel, alors toute orbite est dense.

Comme dans le cas des translations sur $\mathbb{R}$ une action par rotiation qui n'est pas minimale est monogène, et est engendrée par une rotation rationnelle.

3.5.2. *Actions venant des actions sur* $\mathbb{R}$. Tout homéomorphisme de $\mathbb{R}$ peut être complété en un difféomorphisme de $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par un point fixe à l'infini.

Plus précisément: le cercle moins un point p est homeomorphe à $\mathbb{R}$. Fixons un homéomorphisme $h\colon \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{p\}$. Alors a toute action φ de G sur $\mathbb{R}$ on associe l'action conjuguée $\psi_h \circ \varphi$ sir $S^1 \setminus p$. Cett action se complete en une action sur S^1 en posant p comme point fixe global.

L'action obtenue ne dépend pas, a conjugaison près, du choix de p ni du chix de h.

Les groupes d'homothétie, translation, et $A(\mathbb{R}, 1)$ agissent donc de façon fidèle sur S^1.

3.5.3. *l'action naturelle de $PGL(2,\mathbb{R})$ et $PSL(2,\mathbb{R})$.* Le groupe $GL(2,\mathbb{R})$ des matrices inversibles agit sur $\mathbb{RP}^1$: l'image d'une droite est une droite.

Cette action n'est pas fidèle: les homothéties agissent trivialement. Le quotient $GL(2,\mathbb{R})$ par les homothéties est le groupe $PGL(2,\mathbb{R})$.

Lemme 3.2. *Il agit fidèlement sur S^1.*

Démonstration : Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ qui fixe 3 droites est une homothétie.
□

Remarque 11. *Les points fixes de l'action de $f \in PGL(2,\mathbb{R})$ correspondent aux direction propre de tout représent $\tilde{f}_i nGL(2,\mathbb{R})$ de f. En conséquence, tout élément de $PGL(2,\mathbb{R})$ admet $0,1$ ou deux point fixe sur S^1.*

Exercice 11. *Montrer que le stabilisateur de tout point est isomorphe à $A(\mathbb{R},1)$.*

On considère aussi l'action de $GL(2,\mathbb{R})$ sur le cercle des demi-droites.

3.6. **Action de $Aff(\mathbb{R})$ sur le compactification de $\mathbb{R}$ et l'action de $PSL(2,\mathbb{R})$ sur S^1.** La compactification $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ correspond à une carte de $\mathbb{RP}^1$: Dans $\mathbb{R}^2$ toute droite vectorielle coupe la droite affine verticale $x = 1$ en un et un seul point, et on complète par la droite vectorielle verticale, correspondant au "point à l'infini".

$(x,y) \mapsto (x, \alpha y + \beta x)$ soit les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

L'action du groupe affine sur le compactifé de $\mathbb{R}$ par un point, n'est autre que celle de ce sous groupe de $PGL(2,\mathbb{R})$.

3.7. **Relevé d'un homéomorphisme du cercle.** Soit f un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. On appelle relevé de f sur $\mathbb{R}$ tout homéomorphisme $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui passe au quotient en f sur S^1 plus precisément, soit π la projection de $\mathbb{R}$ sur S^1. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \end{array}$$

Lemme 3.3. *Pour tout homéomorphisme f de S^1, il existe un relevé F de f sur $\mathbb{R}$.*

Si F et G sont deux releve de f alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $G(x) = F(x) + n$, pour tout x.

- *Si f preserve l'orientation, alors F verifie $F(x+1) = f(x) + 1$.*
- *Si f inverse l'orientation alors F verifie $F(x+1) = F(x) - 1$.*

Démonstration : On choisit un point x de S^1 et son image y. On considère les segment $[x, x+1]$ et $[y, y+1]$. L'homéomorphisme f induit un homéomorphisme de ces deux intervalles et la question est si l'image de x est y ou $y+1$. □

On note $\widetilde{Homeo}_+(S^1)$ le groupe d'homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui commutent avec $x \mapsto x+1$.

3.8. **Construction d'un groupe de diffeomorphisme de S^1.** Le but de cette partie est d'illustre les relations entre $\mathbb{R}$ et S^1 en explicitant une construction de groupe de difféomorphisme de S^1 dont on contrôle l'ensemble des points fixes.

On note $\widetilde{PSL(2},\mathbb{R})$ l'ensemble des relevés sur $\mathbb{R}$ des élément de $PSL(2,\mathbb{R}) \subset Homeo_+(S^1)$.

Exercice 12. *On se fixe un entier $k > 0$. Etant donné $F \in Homeo_+(S^1)$ on note $F_k = h_{\frac{1}{k}} F h_k$, et on considère l'application ψ définie par: $\psi_k(F) = F_k$.*

(1) *montrez que ψ_k est in isomorphisme du groupe $Homeo_+(\mathbb{R})$.*

(2) *montrez que si* $F \in \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ *(c'est à dire que* F *commute avec la translation* T_1*) alors* F_k *commute avec la translation* $T_{\frac{1}{k}}$*. En déduire que* F_k *commute aussi avec la translation* T_1*. En conséquence* $F_k \in \widetilde{Homeo}_+(S^1)$*.*

   Est-ce que ψ_k *induit un isomorphisme de* $\widetilde{Homeo}_+(S^1)$*?*

(3) *montrez que l'image de* ϕ_k *est l'ensemble des homómorphismes qui commutent avec la translation* $x \mapsto x + \frac{1}{k}$*.*

(4) *On note* $PSL_k(2, \mathbb{R})$ *l'ensemble des projetés sur* S^1 *de* $\psi_k((\widetilde{PSL(2}, \mathbb{R})$*.*

   Montrez que le cardinal de l'ensemble des points fixe des éléments de $PSL_k(2, \mathbb{R})$ *est toujours un multipne de* k *et qu'il est inférieur à* $2k$*.*

4. Groupes agissant sans points fixes: le théorème de Holder

Rappelons que si f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sans point fixe, alors f est conjugué à la translation $x \mapsto x+1$. Nous allons considérer à présent un groupe qui agit librement sur $\mathbb{R}$. Chacun de ses éléments sont donc individuellement conjugués à des translations. La questions qui nous occupe est de savoir si on peut conjuguer à des translations simultanément tous les éléments de cette action.

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème de Hölder:

Théorème 2. *Soit $G \subset Homeo(\mathbb{R})$ un groupe d'homéomorphisme tels que tout élément de G different de l'identité n''a aucun point fixe.*

Alors G est un groupe abélien, ordonné, archimédien.

De plus il existe un morphisme injectif $t\colon G \to \mathbb{R}$ et une application continue croissante h de $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R} & \stackrel{x\mapsto gx}{\longrightarrow} & \mathbb{R} & \\ h & \downarrow & & \downarrow & h \\ & \mathbb{R} & \stackrel{x\mapsto x+t(g)}{\longrightarrow} & \mathbb{R} & \end{array}$$

4.1. **Un groupe ordonné archimédien.**

Notons $f \prec g$ si $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < g(x)$

Lemme 4.1. *La relation $f \prec g$ definit une relation d'ordre total sur G. De plus elle est invariante par multiplication à doite et à gauche par les élements de G.*

Enfin, l'ordre $\prec$ est archimédien.

Démonstration :

Affirmation 1. *Tous les éléments de G preservent l'orientation.*

Démonstration : Sinon pour $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$ en particulier $f(x) - x > 0$ et pour $x \to +\infty$ $f(x) \to -\infty$ donc $f(x) - x < 0$. Le th'eorème des valeurs intermediaires implique qu'il existe x avec $f(x) = x$. L'hypothèse implique $f = i$ ce qui contrdit que f inverse l'orientation. □

Affirmation 2. *S'il existe x_0 tel que $f(x_0) < g(x_0)$ alors pour tout x $f(x) < g(x)$.*

Démonstration : Sinon, par le theoreme des valeurs intermediaires il existe x_1 tel que $f(x-1) = g(x-1)$. Donc $g^{-1}f(x_1) = x_1$. L'hypothèse implique $g^{-1}f = id$ donc $g = f$ contredisant $f(x) < g(x)$. □

Affirmation 3. *$\prec$ est un ordre total.*

Démonstration : Si $f \prec g$ et $g \prec h$ alors pour tout x $f(x) < g(x) < h(x)$. Cela prouve la transitivité de $\prec$. L'antisymetrie est desormais claire. C'est donc une relation d'ordre (stricte)

De plus pour tout f, g $f(0) < g(0)$ (alors $f \prec g$ ou $f(0) > g(0)$ donc $f \succ g$ ou $f(0) = g(0)$ alors $f = g$. L'ordre $\prec$ est donc total. □

Affirmation 4. *Pour tout f, g, h on a*

$$f \prec g \Rightarrow (hf \prec hg \ et \ fh \prec gh)\,.$$

Démonstration : Si $f(x) < g(x)$ alors $hf(x) < hg(x)$ car h preserve l'orientation. Si $f(x) < g(x)$ alors ceci vaut en tout point x. En particulier en $h(x)$. Donc $f(h(x)) < g(h(x))$.

La relation d'ordre $\prec$ est donc compatible avec la multiplication a droite et a gauche.
$\square$ On termine le lemme par l'affirmation suivante:

Affirmation 5. *Pour tout f, g tels que $f \succ id$ il existe $n > 0$ tel que $f^n \geq g$.*

Cette affirmation est une consquence directe de l'affirmation

Affirmation 6. *Pour tout $f \succ id$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = +\infty$*

Démonstration : En effet la suite $f^n(x)$ est croissante. Si elle est majorée elle converge. La limite est alors un point fixe de f ce qui contredi l'hypothèse. $\square$

Donc si $f \succ id$ il existe n tel que $f^n(0) > g(0)$, donc $f^n \succ g$. Le groupe est archimédien. $\square$

Remarque 12. *$f \prec g$ et $h \prec k$ implique $fh \prec gh \prec gk$. En particulier, on montre par recurence que, pour tout $n > 0$ $f^n \prec g^n$.*

4.2. **Le nombre de translation relatif.** Fixons $f \in G$ tel que $f \succ id$.Pour tout n on note $t_{f,n}(g) = \frac{p}{n}$ tel que $f^p \preceq g^n \prec f^{p+1}$

Lemme 4.2. *La suite $t_{f,n}(g)$ converge quand $n \to \infty$. On note $t_f(g)$ la limite.*

Démonstration : On remarque que $f^p \preceq g^n \prec f^{p+1}$ implique que pour tout $k > 0$, $f^{pk} \preceq g^{nk} \prec f^{(p+1)k}$.

Donc $t_{f,nk} \in [t_{f,n}, t_{f,n} + \frac{1}{n}[$.

En particulier, pour tout n, m positifs on a

$$t_{f,nm} \in \left([t_{f,n}, t_{f,n} + \frac{1}{n}[\cap [t_{f,m}, t_{f,m} + \frac{1}{m}[\right)$$

En particulier $[t_{f,n}, t_{f,n} + \frac{1}{n}[\cap [t_{f,m}, t_{f,m} + \frac{1}{m}[\neq \emptyset$ donc

$$|t_{f,n} - t_{f,m}| < \sup\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$$

Ceci prouve que la suite $t_{f,n}$ est de Cauchy donc converge. $\square$

La limite $t_f(g)$ est le *nombre de translation relatif de g par rapport a f.*

Remarque 13. *Si f et g sont les translations τ_r et τ_s de $\mathbb{R}$, alors $t_f(g) = \frac{s}{r}$.*

Remarque 14. *L'application $g \mapsto t_f(g)$ est croissante de $(G, \prec)$ vers $(\mathbb{R}, <)$. Plus precisément, si $g_1 \prec g_2$ alors $t_f(g_1) \leq t_f(g_2)$.*

Lemme 4.3. *L'application $G \to \mathbb{R}$ $g \mapsto t_f(g)$ est un homomorphisme de groupe.*

Démonstration : Considérons g, h. On considère gh et hg. Quitte a inverser les rôles on peut supposer $gh \preceq hg$.

Affirmation 7. *Pour tout $n > 0$ on a $gh^n \preceq h^n g$ et $g^n h \preceq hg^n$*

Démonstration : Par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est notre hypothèse. Voyons le pour $n + 1$:

$$gh^{n+1} = (gh^n)h \preceq (h^n g)h = h^n(gh) \preceq h^n hg = h^{n+1}g.$$

Ceci utilise a plusieurs reprise l'invariance de l'ordre par multiplication a droite et à gauche. De même

$$g^{n+1}h = gg^n h \preceq ghg^n \preceq hg^{n+1}.$$

□

Affirmation 8. *pour tout $n > 0$ $g^n h^n \prec (gh)^n = ghgh...gh \prec h^n g^n$*

Démonstration :

On montre cette inégalité par récurrence sur n. Pour $n = 1$ il s'agit juste de notre hypothèse $gh \prec hg$.

Supposons donc $g^n h^n \prec (gh)^n = ghgh...gh \prec h^n g^n$, et montrons l'inégalité pour $n + 1$.

$$\begin{aligned} g^{n+1}h^{n+1} = g^n(gh^n)h) \preceq g^n h^n gh \preceq (gh)^n gh = (gh)^{n+1} = \\ = (gh)(gh)^n \preceq (hg)(h^n g^n) = h(gh^n)g^n \preceq h(h^n g)g^n = h^{n+1}g^{n+1} \end{aligned}$$

□ Fixons un entier $n > 0$ quelconque. Par définition de $t_{f,n}(g)$ et $t_{f,n}(h)$ on a les encadrements suivant

$$\begin{aligned} f^{nt_{f,n}(g)} \preceq g^n \prec f^{nt_{f,n}(g)+1} \\ f^{nt_{f,n}(h)} \preceq h^n \prec f^{nt_{f,n}(h)+1} \end{aligned}$$

En multipliant ces intégalités, et en utilisant l'affirmation ci-dessus, on en déduit:

$$f^{n(t_f(g)+t_f(h))} \preceq g^n h^n \preceq (gh)^n \preceq h^n g^n \preceq f^{n(t_f(g)+t_f(h))+2}$$

D'autre part, toujours par définition de $t_{f,n}(gh)$ on a l'encadrement suivant:

$$f^{nt_{f,n}(gh)} \preceq (gh)^n \prec f^{nt_{f,n}(gh)+1}$$

On en déduit :

$$t_{f,n}(g) + t_{f,n}(h) \preceq t_{f,n}(gh) \preceq t_{f,n}(g) + t_{f,n}(h) + \frac{1}{n}.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient $t_f(g) + t_f(h) = t_f(gh)$.

□

Lemme 4.4. *L'homomorphisme $g \mapsto t_f(g)$ est injectif*

Démonstration : Soit g tel que $g \succ id$. Alors il existe $n > 0$ tel que $g^n(0) > f(0)$. Donc $g^n \succ f$ donc $t_f(g) \geq \frac{1}{n}$ (car t_f est un morphisme et une application croissante. □

Corollaire 4.1. *Le groupe G est commutatif.*

Démonstration : Pour tout g h, $t_f(gh) = t_f(g) + t_f(h) = t_f(hg)$. En particulier $t_f(gh) = t_f(hg)$. Comme l'application $t_f : G \to \mathbb{R}$ est injective on obtient $gh = hg$. □

Remarque 15. *On a montré en fait que G est isomorphe à un sous groupe de $\mathbb{R}$.*

Exercice 13. *Montrez que* $t_f(g).t_g(h) = t_f(h)$ *pour tous* $f, g, h \in G$ *tels que* $f \succ id$ *et* $g \succ id$.

4.3. **Semi-conjugaison de G à un sous groupe du groupe des translations.** L'application $g \mapsto t_f(g)$ est un isomorphisme croissant de G sur un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Pour terminer la preuve du théorème, il reste à construire la semi conjugaison $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entre l'action de G et un sous groupe du groupe des translations de $\mathbb{R}$.

Fixons un point de $\mathbb{R}$, le point 0 par exemple, et un élément $f \succ id$ de G. L'orbite $\mathcal{A} = G.0$ est une partie de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{B} = \{t_f(g), g \in G\}$. Rappelons que $\mathcal{B}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Je vous rappelle le lemme suivant que vous connaissez sans doutes

Lemme 4.5. *Soit* $\mathcal{B}$ *un sous groupe de* $(\mathbb{R}, +)$. *Alors:*

- *Ou bien* $\mathcal{B}$ *est monogène (engendré par* 1 *élément. C'est à dire* $\mathcal{B} = \mathbb{Z}.b$)
- *Ou bien* $\mathcal{B}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Cela correspond a $\inf\{b \in B, b > 0\} > 0$ ou $\inf\{b \in B, b > 0\} = 0$.
□

4.3.1. *Si* $\mathcal{B}$ *est monogène.* Alors G aussi. Soit g un générateur de G. Alors g est conjugué à une translation par un homéomorphisme h. Cette conjugaison conjugue l'action de G.

4.3.2. *Si* $\mathcal{B}$ *est dense.* Nous allons utiliser le résultat classique suivant de topologie de $\mathbb{R}$:

Lemme 4.6. *Soient* A *et* B *deux parties de* $\mathbb{R}$. *On suppose que*

- h *est une application croissante surjective de* A *sur* B
- $\mathcal{B}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{A}$ *n'est ni majorée, ni minorée.*

Alors h *se prolonge de facon unique en une appplication conitinue croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Affirmation 9. *Pour tout* x *on a* $\sup\{h(y), y \in \mathcal{A}, y < x\} = \inf\{h(z), z \in \mathcal{A}, z > x\}$.

Démonstration : $\sup\{h(y), y \in \mathcal{A}, y \leq x\} \leq \inf\{h(z), z \in \mathcal{A}, z \geq x\}$, ce qui montre que ces deux quantités sont finies. Un nombre dans l'intervalle ne peut être image d'aucun élement de $\mathcal{A}$. Si cet intervalle n'est pas vide, cela contredit donc la densité de B. □

On définit alors $h(x) = \sup\{h(y), y \in \mathcal{A}, y < x\} = \inf\{h(z), z \in \mathcal{A}, z > x\}$ □

Remarque 16. *L'application* $G \to \mathcal{A}$ *définie par* $g \mapsto g(0)$ *est une bijection croissante.*

Corollaire 4.2. *L'application* $h_0\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *définie par* $g(0) \mapsto t_f(g)$ *est une bijection croissante.*

On note h l'application continue croissante obtenue en prolongeant h_0. On conclut la preuve du théorème en montrant

Lemme 4.7. h *induit une semi-conjugaison de l'action de* G *avec le groupe* $\{\tau_b, b \in \mathcal{B}\}$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $g \in G$. On doit montrer $h(x) + t_f(g) = h(g(x))$.

Soit $y \in \mathcal{A} = G.0$ tel que $y \leq x$. Il existe $g_1 \in G$ tel que $y = g_1(0)$. Donc $g(y) \leq g(x)$. D'autre part, par définition de h_0 on a:

$$h_0(g(y)) = t_f(gg_1) = t_f(g) + t_f(g_1) = h_0(y) + t_f(g)$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} h(x) + t_f(g) & = & \sup_{y \in \mathcal{A}, y \leq x} h_0(y) + t_f(g) \\ & = & \sup\{h_0(g(y)), y \in \mathcal{A}, y \leq x\} \\ & \leq & \sup\{h_0(z), z \in \mathcal{A}, z \leq g(x)\} = h(g(z)). \end{array}$$

On montre l'inégalité inverse en montrant que les ensembles $\{g(y), y \in \mathcal{A}, y \leq x\}$ et $\{z \in \mathcal{A}, z \leq g(x)\}$ sont égaux. Pour cela on écrit z comme $g(g^{-1}(z))$, avec $g^{-1}(z) \leq x$ et $g^{-1}(z) \in \mathcal{A}$.

On en déduit l'égalité annoncée

$$h(g(x)) = \sup\{h_0(z), z \in \mathcal{A}, z \leq g(x)\} = h(x) + t_f(g) = \tau_{t_f(g)}(h(x)).$$

$\square$

4.4. Définition et intérêt d'une semi-conjugaison.

Quel est l'intérêt de ce théorème?

Définition 4.1. *Soient F et G deux groupes munis d'actions fidèles sur des espaces metriques X et Y. Soit $h \colon X \to Y$ une application surjective. On dit que h est une semi conjugaison entre F et G s'il existe une application $\rho \colon F \to G$ telle que, pour tout x et $f \in F$ on ait: $h(f(x)) = \rho(f)(h(x))$.*

Alors

(1) l'application ρ est un morphisme de F sur G:
  - $\rho(id) = id$ car G est fidele.
  - $\rho(f_2 f_1)h(x) = h(f_2 f_1(x)) = \rho(f_2)(h(f_1(x))) = \rho(f_2)\rho(f_1)(h(x))$, pour tout x.

(2) l'image d'une orbite de F est contenue dans une orbite de G. h induit donc une application surjective de l'ensemble des orbites de F sur l'ensemble des orbites de G.

(3) Considerons un point y de Y et $h^{-1}(y)$ (appelé la fibre au dessus de y). Soit $f \in F$ et $g \in G$ tel que $g = \rho(f)$. Alors $f(h^{-1}(y) \subset h^{-1}(g(y))$. En applicant le même raisonnement a f^{-1} et à $h^{-1}(g(y)$, on obtient $f^{-1}(h^{-1}(g(y)) \subset h^{-1}(y)$ D'ou:

$$f(h^{-1}(y) \subset h^{-1}(g(y)).$$

Autrement dit, tout $f \in F$ preserve les fibres: l'image d'une fibre est une fibre.

Un semi-conjugaison amène une perte d'information. Cette perte d'information est moins importante si:

- ρ est un isomorphisme.
  - la surjectivité assure que, l'image d'une orbite de F est exactement une orbite de G. (si ρ n'est pas surjectif on préférera parler de semi-conjugaison à un sous-groupe de G).
  - l'injectivite signifie qu'il n'y a pas déléments de F qui preserve chacune des fibres de h.

- Une bonne partie de l'information perdue est *la dynamique dans les fibres*, car l'action de G est obtenue à partir de celle de f en écrasant les fibres. La semi-conjugaison garde plus d'iformation si cette dynamique dans les fibres est pauvre:

  Soit f un élément de F et $y$un point de Y, tels que y est un point fixe de $\rho(f)$. Dans ce cas f preserve la fibre au dessus de y:

$$f(h^{-1}(y)) = h^{-1}(y).$$

  La perte d'information est moins importante si la restriction de f à la fibre $h^{-1}(y)$ est l'identité.

Autrement dit, quand on a obtenu une semi conjugaison, il est important de preciser les propriétés de cette semi-conjugaisons.

4.5. **Cas du théorème de Holder.** On a déja vu que l'homomorphisme t_f était un isomorphisme de G sur un sous groupe du groupe de translation.

L'application h est une application continue croissante. Les fibres sont donc des segments compacts.

De plus le sous groupe de translation $\{t_f(g), g \in G\}$ agit sans point fixe sur $\mathbb{R}$. Aucun élément de G différent de id ne préserve aucune fibre. On en déduit que, pour toute $x \in \mathbb{R}$ l'application h induit une bijection de l'orbite $G.x$ sur l'orbite $t_f(G).h(x)$ de $h(x)$ sur le sous-groupe de translation.

Remarque 17. *Soit $I = h^{-1}(x)$ une fibre non réduite à un point. Alors pour tout $g_1, g_2 \in G$*

$$g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1(I) \cap g_2(I) = \emptyset.$$

On en déduit

Lemme 4.8. *Si h n'est pas un homémorphisme de conjugaison, alors G est dénombrable.*

Démonstration : Toute famille d'ouvert deux à deux disjoint est au plus dénombrable. En effêt, à tout ouvert I on peut associer le nombre $p/q \in \mathbb{Q} \cap I$ tel que (q, p) soit le plus petit pour l'ordre lexicographique. C'est une application injective sur $\mathbb{Q}$ qui est dénobrable.

Le famille des intérieurs des fibres de h est donc dénombrable. On conclut avec la remarque précédent le lemme. □

4.6. **Unicité de la conjugante.**

Lemme 4.9. *Soit $G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ un sous-groupe qui n'est pas monogène.*

Soit $h_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue croissante, non constante, qui realise une semi conjugaison entre G et un sous groupe de translation.

Alors $h_1 = \varphi \circ h$ ou $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de la forme $t \mapsto at + b$.

Remarque 18. *Une étude plus approfondie de la structure des orbites de G nous permettrait de generaliser le lemme en omettant l'hypothèse h_1* est croissante*: il suffit que h_1 soit continue et non constante.*

Démonstration :
Par définition de h_1, pour tout $g \in G$ il existe un réel $\tau_1(g) \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h_1(g(x)) = h_1(x) + \tau_1(g)$. De plus l'application $g \mapsto \tau_1(g)$ est un morphisme de G sur un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Affirmation 10. *Si $g \succ id$ alors $\tau_1(g) > 0$*

Démonstration : Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g^n(x) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Comme h_1 est croissante et non constante, cela implique qu'il existe x et $n > 0$ avec $h_1(g^n(x)) > h_1(x))$. Cependant $h_1(g^n(x)) = h_1(x) + n\tau_1(g)$. Donc $n.\tau(g) > 0$ d'ou $\tau(g) > 0$ □

On en déduit que $g \mapsto \tau_1(g)$ est un isomorphisme croissant de G dans un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On en déduit que $t_f(g) \mapsto \tau_1(g)$ induit un isomorphisme croissant entre les deux sous-groupes (archimediens) $t_f(G)$ et $\tau_1(G)$ de $(\mathbb{R}, +)$, qui sont non-monogènes dons sont denses dans $\mathbb{R}$.

Cette application se prolonge donc de façon unique en un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ qui est de plus un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$. On en déduit:

Affirmation 11. *Pour tout $g \in G$ on a*

$$\tau_1(g) = \tau_1(f).t_f(g).$$

Remarquons que, pour tout $t > 0$, l'application $h_{2,t} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_{2,t}(x) = \frac{1}{t} h_1(x)$, pour $t > 0$ est une autre semi-conjugaison: En effet

$$h_{2,t}(g(x)) = \frac{1}{t}(h_1(g(x)) = \frac{1}{t}(h_1(x) + t_g) = h_{2,t}(x) + \frac{t_g}{t_1}.$$

On a juste divisé par t les nombres de translations a l'arrivée.

On note

$$h_2 = h_{2,\tau(f)} = \frac{1}{\tau(f)}.$$

Donc h_2 est une semi conjugaison continue croissante telle que, pour tout x on a: $h_2(f(x)) = f(x) + 1$, c'est à dire $\tau_2(f) = t_f(f) = 1$. On en déduit que pour tout g, $\tau_2(g) = t_f(g)$. Autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $g \in G$ on a

$$h_2(g(x)) = h_2(x) + t_f(g).$$

Notons $b = h_2(0)$. Alors $h_3 = h_2 - b$ est une semi-conjugaison telle que $\tau_3(g) = t_f(g)$ et $h_3(0) = 0$.

On en déduit que pour tout $g \in G$ on a:

$$h_3(g(0)) = t_f(g).$$

Autrement dit h_3 et h coincident sur la partie $\mathcal{A}$. Comme l'image $\mathcal{B}$ est dense, on a vu que l'extension croissante est unique. On en déduit que $h_3 = h$.

Donc $h_1 = \tau_1(f)(h + b)$ ce qui conclut la preuve du lemme.

□

4.7. **Une action sans points fixes qui n'est pas conjuguée à un groupe de translation.** L'idée est simple: on considère un groupe déombrabble agissant sur $\mathbb{R}$ par translations et de façon minimale; on considère une famille au plus dénobrable d'orbites. On va *ouvrir ces orbites*, c'est à dire remplacer chacun des points par un intervalle.

Ceci peut sembler difficile, puisque chaque orbite est dense. Le lemme suivant explique comment, techniquement, on peut remplacer les points d'une famille dénombrable par des intervalles:

Lemme 4.10. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ une partie dénombrable. Soit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une indexation des éléments de E. Soit ℓ_i une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_i \ell_i < +\infty$.*

Il existe une application continue croissante $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'on a:

- *$h^{-1}(x)$ est un singleton si $x \notin \mathcal{E}$*
- *$h^{-1}(x_i)$ est un segment de longueur ℓ_i*

Démonstration : Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ tel que $x > x_0$ on définit

$$h^{-1}(x) = x + \sum\{\ell_i | x_i \in [x_0, x]\}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ tel que $x < x_0$ on définit

$$h^{-1}(x) = x - \sum\{\ell_i | x_i \in [x, x_0[\}$$

La fonction $h^{-1}\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, continue et va de $-\infty$ à $+\infty$.

h ainsi défini se prolonge de façon unique en $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue croissante. □

Considérons $a_1, a_2, \dots, a_k, ...$ une famille (au plus dénombrable mais de cardinal au moins 2) de nombres irrationnels entre eux:

$$\left(\sum n_i a_i = 0 \text{ avec } n_i \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow n_i = 0.$$

Notons $G \subset \mathbb{R}$ le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par les a_i. C'est un sous groupe dénombrable dense.

L'application $a \in G$ associe la translation $x \mapsto x + a$ induit un isomorphisme de G sur un sous groupe de translation de $\mathbb{R}$. Cela engendre une action libre de G par translations sur $\mathbb{R}$, et dont toutes les orbites sont denses dans $\mathbb{R}$.

Choisissons $x_1, \dots, x_l ...$ des points sur des orbites deux à deux différentes. L'union des orbites des x_i forme un ensemble dénombrable $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. On fixe des longueurs ℓ_i, telles que $\sum_i \ell_i < +\infty$ et on construit h comme dans le Lemme 4.10.

On construit une action de $\mathbb{Z}^l$ sur $\mathbb{R}$, sans points fixes, de la façon suivante:

- x tel que $h(x) \notin \mathcal{E}$ alors $\tilde{g}(x)$ est l'unique y tel que $h(y) = g(h(x))$.
- Soit I une composante connexe de $h^{-1}(\mathcal{E})$. Alors $h(I)$ est un point de $\mathcal{E}$. $y = g(h(I))$ est un autre point de $\mathcal{E}$ et $h^{-1}(y)$ est un segment J. On definit g sur I comme étant l'unique homéomorphisme affine croissant de I sur J.

5. Le théorème de Solodov

On s'intéresse aux groupes agissant sur $\mathbb{R}$ avec au plus un point fixe. On a un exemple simple: le groupe affine $A(1, \mathbb{R})$.

Exemple 3. *Un autre exemple: considérons un isomorphisme φ (pas nécessairement croissant) entre deux sous-groupe Γ_- et Γ_+ de $(]0, +\infty[, \times)$. L'ensemble des homéomorphismes f de $\mathbb{R}$ qui coïncident avec h_{γ_-}, $\gamma_- \in \Gamma_-$ sur $]-\infty, 0]$ et avec $\varphi(\gamma_-)$ sur $[0, +\infty[$.*

Plus concrètement, on considère deux familles $\{a_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ et $\{b_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ de nombres irrationnels entre eux (autrement dit, ce sont des systèmes libres dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$). On considère les applications f_i qui coincide avec l'homothetie h_{a_i} sur $[0, +\infty[$ et avec h_{b_i} sur $]-\infty, 0]$.

5.1. Cas des actions admettant un point fixe commun.

Dans l'exemple ci-dessus, tous les éléments du groupe ont un point fixe commun (c'etait 0 en l'occurence). Réciproquement, si $G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ admet un point fixe commun $\{x_0\}$ à tous ses éléments, alors les intervalles $]x_0, +\infty[$ et $-\infty, x_0[$ sont invariant par l'action du groupe. Le groupe agit donc par restriction sur chacun de ces intervalles.

Si de plus les élément de G avaient au plus un point fixe x_0, alors il sont sans points fixes sur $]x_0, +\infty$ et sur $]-\infty, x_0[$. Autrement dit les actions induites par G sur $]-\infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$ sont libres.

Remarquons que $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ via par exemple les homéomorphismes $x \mapsto -\log(-x)$ et $x \mapsto \log(x)$, respectivement. Ces actions sont donc conjugées chacune à une action libre de G sur $\mathbb{R}$.

Le Théorème de Hölder, appliqué à l'action sur $]x_0, +\infty[$, permet de construire une application continue croissante surjective $]x_0, +\infty[\to]0, +\infty[$ qui induit une semi conjugaison de l'action de G avec un sous groupe Γ_+ d'homothéties.

De la même façon il existe une application continue croissante surjective $h_- \colon]-\infty, x_0[\to]-\infty, 0[$ qui réalise une semi conjugaison à un groupe d'homothéties Γ_-.

L'application $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut h_- pour $x < 0$ et h_+ pour $x > 0$ est alors continue croissante surjective, et réalise une semi-conjugaison de l'action de G sur $\mathbb{R}$, avec l'action présentée dans l'exemple 3.

On a donc montré:

Théorème 3. *Si $G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ est un groupe tel que $\forall g \in G \setminus \{id\}$, l'homéomorphisme g a au plus 1 point fixe, et si G admet un point x_0 fixé par tous les élément de G, alors il existe une application continue croissante surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui réalise une semi-conjugaison avec l'une des actions présentées dan l'Exemple 3*

5.2. Enoncé du théorème de Solodov.

Le théorème de Solodov dit que les exemples ci-dessus sont essentiellement les deux seules possibilités.

Théorème 4. *Soit $G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ un groupe agissant sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $g \in G$ $Fix(g)$ contient au plus 1 point. Alors:*

- *Ou bien G a un point fixe commun à tous les élément de G: $G.x = \{x\}$.*
- *Ou bien il existe une application continue croissante h que réalise une semi-conjugaison de G avec un sous groupe du groupe affine.*

5.3. **Homéomorphismes ayant un point fixe.** Si tout homéomorphisme de G n'a aucun point fixe, le théorème de Solodov est un corollaire de celui de Hölder.

On suppose désormais qu'il existe au moins un élément f_0 de G ayant un point fixe x_0.

On suppose également qu'il n'y a pas de point fixe commun à tous les éléments de G.

Remarque 19. *Considérons l'ensemble des homéomorphismes préservant l'orientation et ayant exactement un point fixe.*

Il y a 4 classes de conjugaisons:

- *les points attracteurs*
- *les point répulseurs*
- *les points repulseurs à droite et attracteurs à gauche. L'homéomorphisme est alors plus grand que l'identité.*
- *les points repulseurs à gauche et attracteurs à droite. L'homéomorphisme est alors plus petit que l'identité.*

Le lemme suivant affirme qu'il n'existe pas de point fixe semi attracteur semi repulseur pour les élément de G.

Lemme 5.1. *$G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ étant un groupe dont les élements ont au plus un point fixe. On suppose qu'il n'y a pas de point fixe commun. Alors tout point fixe est attracteur ou repulseur.*

Démonstration : On suppose qu'il existe $f_0 \leq id$ avec un point fixe x_0. Remarquons que :

- $f_0^n(x) \to -\infty$ pour tout $x < x_0$ quand $n \to +\infty$, et
- $f_0^n(y) \to x_0$ pour tout $y > x_0$ quand $n \to +\infty$.

Le point x_0 n'étant pas (par hypothèse sur G) un point fixe commun, il existe g tel que $g(x_0) \neq x_0$. Quitte à remplacer g par g^{-1} on peut supposer $g(x_0) > x_0$.

On note $f_1 = gf_0g^{-1}$. Alors $f_1 \leq id$, et $x_1 = g(x)$ est son seul point fixe.

Remarque 20. *Pour tout n,*

$$f_0^n(x_0) = x_0 > f_1(x_0)$$

.

Remarque 21. *Considérons $y < x_0$. Comme $\lim f^n(y) = -\infty$ on obtient qu' Il existe $n_1 > 0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$ on a*

$$f_0^n(y) < f_1(y)$$

Remarque 22. *Fixons $z > x_1$. Comme $\lim f_0^n(z) = x_0 < x_1$ et $f_1(z) > x_1$ on obtient qu'il existe n_2 tel que, pour tout $n \geq n_1$ on a*

$$f_0^n(z) < f_1(z)$$

Donc, pour $n \geq \sup\{n_1, n_2\}$ on a que $y < x_0 < z$ et $f_0^n(y) < f_1(y)$ et $f_0^n(x_0) > f_1(y)$ et $f_0^n(z) < f_1(z)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $y_1 \in]y, x_0[$ et $z_1 \in]x_0, z[$ tels que $f_0^n(y_1) = f_1(y_1)$ et $f_0^n(z_1) = f_1(z_1)$.

Cela contredit l'hypothèse : $f_1^{-1} f_0^n$ a deux point fixes mais n'est pas l'identité.

□

En consequence, tout $g \in G$ ayant un point fixe est ou bien attracteur ou bien repulseur.

5.4. **Une relation d'ordre.** On note $f \lhd g$ si $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq C$ on a $f(x) < g(x)$.

Lemme 5.2. *La relation $\lhd$ est une relation d'ordre totale sur G.*
De plus cet ordre est invariant par multiplication à droite et à gauche.

Démonstration : La relation est clairement transitive et antisymetrique.
Il reste à voir que cet ordre est total:
Il suffit de voir que les graphes de f et de g ne peuvent se croiser qu'au plus en un point.

□

Cet ordre n'est pas a priori archimédien: d'ailleurs il ne l'est pas dans le cas du groupe affine:

Exercice 14. *Soit $G \subset A_+(1\mathbb{R})$ un sous-groupe du groupe affine. Pour tout élément $g \in G$ notons $(a_g, b_g) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ tel que $g\colon x \mapsto a_g x + b_g$.*
Montrez que l'ordre $\lhd$ sur G induit l'ordre lexicographique sur $\{(a_g, b_g), g \in G\}$.
En déduire que si $f \in G$ vérifie $a_f > 1$ et si $g \in G$ est une translation, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $g^n \lhd f$.

Le lemme suivant montre que $(G, \lhd)$ n'est pas loin d'être archimédien:

Lemme 5.3. *Soit f ayant un point fixe et $f > id$, alors pour tout g il existe n tel que $f^n \rhd g$.*

Démonstration : On choisit $x < fixf < y$. Alors $\lim f^n(x) = -\infty$ et $\lim f^n(y) = +\infty$. En particulier, pour n grand $f^n(x) < g(x)$ et $f^n(y) > g(y)$ ce qui fait que les graphes de f^n et de g: ces graphes ne peuvent don plus se croiser apres y. Donc $f^n(t) > g(t)$ sur $[y, +\infty[$ soit $f^n \rhd g$. □

5.5. **Nombre de translation relatif à f.** Pour tout g on note $\rho_{n,f}(g) = p/q$ de façon que $f^p \lhd g^q \unlhd f^{p+1}$.

Lemme 5.4. *La suite $\rho_{n,f}(g)$ converge quand $n \to +\infty$. On note $\rho_f(g)$ la limite. C'est le nombre de translation de g par rapport a f.*

Lemme 5.5. *$g \mapsto \rho_f(g)$ est un morphisme de G dans $\mathbb{R}$.*

Ces deux lemmes ont une preuve identique à celle du théorème de Hölder. En fait ceci vaut pour tout groupe muni d'un ordre invariant à droite et à gauche, et possèdant un élément f tel que, pour tout g, il existe $n > 0$ tel que $f^n > g$.

Exercice 15. *Avec les notations de l'Exercice 14, montrez que, si $G \subset A_+(1, \mathbb{R})$ alors*

$$\rho_f(g) = \frac{\log a_g}{\log a_f}.$$

Vous commencerez par montrer que $g \mapsto \log a_g$ est un morphisme de G sur $\mathbb{R}_+$. Vous montrerez ensuite que le noyau de ρ_f est exactement l'intersection de G avec le groupe des translations.

5.6. **Le noyau de du nombre de translation ρ_f.** En corollaire du Lemme 5.3 on a:

Lemme 5.6. *Si $h \in ker(\rho_f)$ alors h est sans point fixe.*

Démonstration : On a vu que, si g a un point fixe et $g \lhd id$ alors il existe n tel que $g^n \lhd f$. Donc $n\rho_f(g) \geq 1$, en particulier $g \notin ker(\rho_f)$. □

Lemme 5.7. *Si g est sans point fixe, alors $\rho_f(g) = 0$.*

Démonstration : Soit g sans point fixe tel que $g(x) > x$. On va montrer que pour tout $n > 0$, on a $\rho_f(g^n) \leq 1$.

Supposons que $\rho_f(g) > 1$. Alors on a

Affirmation 12. *Pour tout $K \in G$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K^{-1}gK(x) \geq f(x)$.*

Démonstration : En effet $\rho_f(K^{-1}gK) > 1$. Donc $K^{-1}gK \rhd f$. Donc pour $x > 0$ grand on a $K^{-1}gK(x) > f(x)$. Comme $g > id$ et $f < id$ sur $]-\infty, x_f]$ on a également $K^{-1}gK(x) > f(x)$ si $|x|$ grand.

Si $K^{-1}gK(z) < f(z)$, les graphes se coupent donc en deux points ce qui permet de construire un élément de G avec deux points fixes, contredisant l'hypothèse sur G.

□

Soit $k \in G$ un élement ayant un point fixe, $k \rhd id$, tel que $x_k > x_f$. Par exemple $k = gfg^{-1}$ et $x_k = g(x_f)$.

On conclut la preuve en montrant

Affirmation 13. *Il existe $n > 0$ et $z \in \mathbb{R}$ tel que $k^{-n}gk^n(z) < f(z)$.*

Démonstration : On choisit $x > x_k$ et $y = g(x)$. Pour n on note $x_n = k^{-n}(x)$ et $y_n = k^{-n}(y)$.

On a $k^{-1}gk^n(z)(x_n) = y_n$. Cependant x_n et y_n convergent vers x_k. En particulier pour n assez grand on a

$$x_k < x_n < k^{-n}gk^n(x_n) = y_n < g(x_k) < g(x_n).$$

□

□

5.7. **Propriétés du noyau de ρ_f.** Comme il n'y a pas de point fixe commun, il y a deux éléments qui ne commutent pas: le commutateur n'est donc pas l'identité. De plus il appartient au noyau de ρ_f. Donc $Ker(\rho_f)$ n'est pas réduit à lélément neutre de G.

De plus $Ker(\rho_f)$ est un groupe agissant librement sur $\mathbb{R}$. Nous avons vu au cours de la preuve du Théorème de Hölder que $Ker(\rho_f)$ est naturellement muni d'un ordre total $\prec$ invariant par multiplication à droite et à gauche.

Lemme 5.8. *Le noyau n'est pas monogène.*

Démonstration : Si $T \geq id$ est un élément du noyau, et si $f \neq id$ possède un point fixe alors T et f ne commutent pas. En effet $T(Fixf) \neq Fixf$.

On en déduit que fTf^{-1} appartient au noyau, et est superieur a identite.

Le groupe engendre par T et fTf^{-1} est inclus dans le noyau, donc est sans point fixe. On en déduit

$$T \succ fTf^{-1} \text{ ou } T \succ f^{-1}Tf.$$

Supposons $T \prec ftf^{-1}$ pour fixer les idées.

On en déduit que f^nTf^{-n} est une suite infinie strictement décroissante d'élements de $Ker\rho_f$ supérieure à l'identité.

C'est impossible si $Ker\rho_f$ est monogène. □

au cours de la preuve du théorème de Hölder nous avons introduit une relation d'ordre $\prec$ sur $Ker\rho_f$ et nous avons vu vu

Corollaire 5.1. *$Ker(\rho_f)$ est un groupe ordonné archimédien pour la relation d'ordre $\prec$.*

Rappelons, d'après le théorème de Hölder, que le choix d'un élément $h \in ker\rho_f$ construit un homomorphisme croissant t_h de $ker\rho_f$ dans $\mathbb{R}, +$

Finalement nous avons construite une application continue croissante surjective $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $g \in G$, l'application φ est une semi conjugaison de $g \in ker\rho_f$ sur $x \mapsto x + t_h(g)$.

5.8. Action de G par conjugaison sur $Ker\rho_f$.

Lemme 5.9. *Pour tout $k \in G$ l'application $\psi_k\colon Ker\rho_f \to Ker\rho_f$, définie par $g \mapsto kgk^{-1}$, est un morphisme de groupe qui est croissant pour $\prec$.*

De plus $\psi_{k_1k_2} = \psi_{k_1} \circ \psi_{k_2}$.

Démonstration : $kg_1g_2k^{-1} = kg_1k^{-1}kg_2k^{-1}$.

Si $g_1(x) < g_2(x)$ alors posons $y = f(x)$. On a $g_1(f^{-1}(y) < g_2(f^{-1}(y)$ et donc $fg_1f^{-1}(y) < fg_2f^{-1}(y)$ car f preserve l'orientation. On en déduit $fg_1f^{-1} \prec fg_2f^{-1}$, le morphisme est donc croissant.

On conclut la preuve du lemme en remarquant que pour tout $k_1, k_2 \in G$ et tout $g \in Ker(\rho_f)$ on a:

$$\psi_{k_1k_2}(g) = k_1k_2g(k_1k_2)^{-1} = k_1(k_2gk_2^{-1})k_1^{-1} = \psi_{k_1}(\psi_{k_2})(g).$$

□

Remarque 23. *Avec les notations de l'exercice 14, si $G \subset A(1,\mathbb{R})$ alors pour tout $k \in G$, le morphisme ψ_k est l'application qui a une translation $T_b \in G$ associe la translation $T_{a_k \cdot b} : x \mapsto x + a_k \cdot b$.*

sur un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$, on en déduit :

Corollaire 5.2. *Pour tout f_1 il existe $\alpha(f_1) > 0$ tel que, pour tout $g \in Ker\rho_f$ on a $t_h(\psi_{f_1}(g)) = \alpha(f_1)t_h(g)$.*

De plus l'application $f_1 \mapsto \alpha(f_1)$ est un homomorphisme de (G) sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Démonstration : Notons $T = t_h(Ker(\rho_f)) \subset \mathbb{R}$. C'est une sous groupe dense de $\mathbb{R}$. Comme $t_h \colon Ker(\rho_f) \to T$ est un isomorphisme croissant, on en déduit que l'application qui à $t_h(g)$ associe $t_h(\psi_{f_1}(g))$ est un isomorphisme croissant de T dense dans $\mathbb{R}$. Cet isomorphisme se prolonge donc en un isomorphisme continu croissant de $\mathbb{R}, +$. C'est donc une homothétie de rapport $\alpha(f_1) > 0$.

De plus pour tout $k_1, k_2 \in G$ et tout $g \in Ker(\rho_f)$ on a

$$\alpha(k_1 k_2) t_h(g) = t_h(\psi_{k_1 k_2}(g)) = t_h(\psi_{k_1}(\psi_{k_2}(g))) = \alpha(k_1) t_h(\psi_{k_2}(g)) = \alpha(k_1).\alpha(k_2).t_h(g)$$

□

Lemme 5.10. *Pour tout $k \rhd id$ ayant un point fixe, on a $\alpha(k) > 1$*

En consequence, l'application $k \mapsto \alpha(k)$ est un morphisme croissant de $(G, \trianglelefteq)$ sur $(]0, +\infty[, \times, \leq)$.

Démonstration : C'est la même idée que pour montrer que les éléments sans point fixe sont dans le noyau.

Soit $k \rhd id$ ayant un point fixe x_k. Rappelons que $h \in Ker(\rho_f)$ est tel que $h \prec 1$.

Pour tout $n > 0$ on considère $k^{-n} h k^n = \psi_{k^{-n}}(h)$. En particulier

$$t_h(k^{-n} h k^n) = \alpha(k)^{-n}$$

Considérons un point $x > x_k$ et $y = h(x)$. Pour tout $n > 0$ on note $x_n = k^{-n}(x)$ et $y_n = k^{-n}(y)$. Rappelons que

- $x_k < x_n < y_n$
- x_n et y_n convergent vers x_k quand n tend vers $+\infty$.

On choisit n tel que $x_k < x_n < y_n < h(x_k)$

De plus $k^{-n} h k^n(x_n) = y_n$.

On a donc

$$k^{-n} h k^n(x_n) = y_n < h(x_k) < h(x_n)$$

On en déduit $k^{-n} h k^n \prec h$ donc $t_h(k^{-n} h k^n) < 1$. Donc $\alpha(k)^{-n} < 1$ soit $\alpha(k) > 1$. Ceci conclut la preuve du lemme.

□

5.9. **Une semi-conjugaison.** D'après le théorème de Hölder, il existe $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue croissante, qui réalise une semi conjugaison de $Ker\rho_f$ avec un sous groupe dense du groupe des translations. Plus préciément, pour tout $k \in Ker(\rho_f)$ on a

$$\varphi \circ k = T_{t_h(k)} \circ \varphi,$$

où $T_{t_h(k)}$ est la translation $x \mapsto x + t_h(k)$.

On termine la preuve du théorème de Solodov en montrant:

Proposition 5.1. *φ réalise une semi conjugaison entre G et un sous groupe de $Aff(1, \mathbb{R})$.*

Lemme 5.11. *Pour tout $g \in G$, la composée $\varphi \circ g$ est une autre semi conjugaison.*

Démonstration :

En effet, pour tout $g \in G$ et tout $k \in Ker(\rho_f)$ on a $gkg^{-1} = \psi_g(k)$ et, par définition de φ:

$$\varphi \circ (g \circ k \circ g^{-1}) = T_{t_h(\psi_g(k))} \circ \varphi = T_{\alpha_g t_h(k)} \circ \varphi$$

Donc pour tout $k \in Ker(\rho_f)$ et tout $g \in Ker(\rho_f)$ on a :

$$(\varphi \circ k) \circ g = T_{\alpha_h t_f(g)} \circ \varphi \circ h$$

$\square$

D'après l'unicité, à multiplication près par une application affine, de la conjugaison φ, on en déduit qu'il existe $\beta(k)$ tel que $\varphi \circ k = \alpha(k) \cdot \varphi + \beta(k)$.

Cela signifie que, pour tout $k \in G$, l'application φ induit une semi conjugaison de k à l'application affine $x \mapsto \alpha(k)x.\beta(k)$.

Cela signifie que φ est une semi-conjugaison de G avec un sous groupe du groupe affine. C'est ce que nous avions annoncé.

6. Homéomorphismes du cercle: la théorie de Poincaré

6.1. **Relevé d'un homéomorphisme du cercle.** Remarquons d'abord que:

- si $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui commute avec la translation $x \mapsto x+1$, c'est à dire $F(x+1) = F(x)+1$, alors F passe au quotient en un une application continue $f\colon S^1 \to S^1$ du cercle.
- si F et G commutent avec la translation $x \mapsto x+1$, et induisent $f, g\colon S^1 \to S^1$ alors le quotient de $F \circ G$ est $f \circ g$.
- De plus F^{-1} commute alors également avec la translation, donc passe également au quotient en une application continue du cercle. De l'item précédent on déduit que le quotient de F^{-1} est l'inverse du quotient f de F.
- On en déduit que f est un homéomorphisme du cercle S^1.

Exemple 4. • *R_α rotation d'angle $2\pi\alpha$ définie par $R_\alpha(t) = t+\alpha$.*

- *$A_{\alpha,\beta}$ définie par $A_{\alpha,\beta}(t) = t+\alpha+\beta\cdot\sin(2\pi t)$, avec $\beta \in]\frac{-1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}[$.*

Ces deux exemples sont des applications differentiables F de $\mathbb{R}$ de dérivée >0 et vérifiant $F(x+1) = x$: elles passent donc au quotient par P en un homéomorphisme du cercle.

- *Plus géralement, on remarque que tout F commutant avec la translation $T_1\colon x \mapsto x+1$ est de la forme $x \mapsto F(x) = x+\varphi$ où φ est une fonction périodique de période 1. Réciproquement, si φ est une fonction périodique de période 1 qui est dérivable en tout point, et si la dérivée $\varphi'(x)$ en tout point x est strictement supérieure à -1, alors la fonction F définie par $x \mapsto x+\varphi$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ qui commute avec T_1.*

Le but de cette section est de voir la réciproque.

Théorème 5. *Soit $f\colon S^1 \to S^1$ un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. Il existe un homéomorphisme croissant $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:*

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ P & \downarrow & & \downarrow & P \\ & S^1 & \to & S^1 & \\ & & f & & \end{array}$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F(x+1) = F(x)+1$ (on dit que F commute avec la translation $x \mapsto x+1$).

Démonstration : L'existence du relêvement provient juste du théorème de relêvement des chemins dans un revêtement: $f \circ P\colon \mathbb{R} \to S^1$ est un chemin dans S^1 et se relêve donc sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi le voir simplement de la façon suivante: pour tout $x \in \mathbb{R}$, la projection P induit une bijection de $[x, x+1[$ sur S^1, qui est un homéomorphisme preservant l'orientation sur $]x, x+1[$. On considère $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = h(0)$ (cad, $x \in P^{-1}(h(0))$).

On définit $F_0\colon [0,1[\to [x, x+1[$ par

$$F_0(t) = \left(P^{-1}(h(P(t)))\right) \cap [x, x+1[.$$

On définit alors F sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = F_0(t - E(t)) + E(t)$ où $E(t)$ est la partie entière de t. On vérifie que F est une bijection croissante de $\mathbb{R}$, donc un homéomorphisme. Par construction, F commute avec la translation $x \mapsto x + 1$ et se projette sur f.

□

Exercice 16. *Montrer que tout autre relevé continu de f est de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On dit que le relevé est* unique, à une constante entière près*.*

6.2. **Rappel: dynamique des rotations.** Soit R_α la rotation de S^1 d'angle $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

- Remarquons d'abord que toutes les orbites ont exactement le même comportement: la rotation R_s commute avec R_α , donc conjugue R_α à elle même, et $R_s(0) = s$, donc l'image de l'orbite de 0 est l'orbite de s.
- si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ alors toute les orbites sont périodiques de période q.

Théorème 6. *Si $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})/ZZ$, alors toute les orbites de R_α sont dense dans le cercle S^1: plus precisément, pour tout $s \in S^1$ $\alpha(x) = \omega(x) = S^1$*

Démonstration : On remarque que $\Gamma = P^{-1}(orb(0)) = \{m + n\alpha, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons que c'est un sous groupe de $\mathbb{R}$. Nous allons voir que Γ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela nous allons voir que Γ contient des élément $s > 0$ arbitrairement petits.

Plus précisément

Lemme 6.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $s \in \Gamma \cap]0, \varepsilon[$.*

Démonstration : On considère les éléments de la forme $s_n = n\alpha - E(n\alpha) \in [0, 1[$. Ces points sont deux à deux distincts, sinon α s'écrirait $\frac{E(n_1\alpha)-E(n_2\alpha)}{n_1-n_2} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Comme $[0, 1]$ est compact, cette suite possède des valeurs d'adhérence ce qui implique qu'il existe $n_1 \neq n_2$ tel que $s_{n_1} < s_{n_2} < s_{n_1} + \varepsilon$. Alors $s = s_{n_2} - s_{n_1}$ est l'élément annoncé. □

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Il contient un intervalle I d'interieur non-vide. Notons $\varepsilon > 0$ la moitié de la longueur de I en notons s un élément de Γ donné par le lemme. Alors I rencontre $s\mathbb{Z}$ en donc $U \cap \Gamma \neq \emptyset$. □

Remarque 24. *L'espace des orbites d'une rotation rationnelle est un cercle. L'espace des orbites d'une rotation irrationnel est un espace non-separé, muni de la topologie grossière.*

6.3. **Nombre de translation d'un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ commutant avec $x \mapsto x + 1$.** Soit F un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui commute avec la translation $x \mapsto x + 1$. L'application $F - id$ est donc continue et périodique de période 1: $(F - id)(x + 1) = (F - id)(x)$. En particulier elle est uniformément bornée. On note $m(F)$ et $M(F)$ les bornes inférieures et supérieures de $F - id$.

Théorème 7. *Les suites $\{\frac{m(F^n)}{n}\}_{n\neq 0}$ et $\{\frac{M(F^n)}{n}\}_{n\neq 0}$ convergent vers un même nombre $\tau(F)$ quand n tend vers $\pm\infty$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \tau(F)$$

Le nombre $\tau(f)$ s'appelle le *nombre de translation* de F.

6.4. **Preuve du Théorème 7.** La preuve du Théorème 7 est l'objet du reste de cette section. On présente ici la preuve classique de ce théorème, qui se trouve dans de nombreux ouvrages. En cours, j'ai présenté une preuve tr'es courte à l'aide de la preuve que nous avons vue du théorème d'Hölder.

Lemme 6.2. (1) *Pour tout $n > k \geq 0$ on a :*

$$m(F^{n-k}) + m(F^k) \leq m(F^n) \leq M(F^n) \leq M(F^{n-k}) + M(F^k)$$

(2) *Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\sup\left\{\frac{m(F^n)}{n}, \frac{m(F^m)}{m}\right\} \leq \frac{m(F^{mn})}{mn} \qquad \textit{et} \qquad \frac{M(F^{mn})}{mn} \leq \inf\left\{\frac{M(F^n)}{n}, \frac{M(F^m)}{m}\right\}$$

(3) *Pour tout n on a:*

$$\frac{m(F^{2^n})}{2^n} \leq \frac{m(F^{2^{n+1}})}{2^{n+1}} \leq \frac{M(F^{2^{n+1}})}{2^{n+1}} \leq \frac{M(F^{2^n})}{2^n}$$

(4) $\frac{M(F^n)}{n} - \frac{m(F^n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

Démonstration : On écrit

$$F^n(x) - x = F^{n-k}(F^k(x)) - F^k(x) + F^k(x) - x = (F^{n-k} - id)(F^k(x)) + (F^k - id)(x).$$

Le max d'une somme est inférieur à la somme des max donc

$$\max\{F^n(x) - x, x \in \mathbb{R}\} \leq \max\{(F^{n-k} - id)(x)\} + \max\{(F^k - id)(x)\}.$$

Ce qui montre l'item (1).

On en déduit que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a

$$\max\{F^{nm}(x) - x, x \in \mathbb{R}\} \leq m \max\{(F^n - id)(x)\}$$

et

$$\max\{F^{nm}(x) - x, x \in \mathbb{R}\} \leq n \max\{(F^m - id)(x)\}.$$

On obtient donc:

$$\frac{M(F^{mn})}{mn} \leq inf\{\frac{M(F^n)}{n}, \frac{M(F^m)}{m}\}.$$

On montre de même $\frac{m(F^{mn})}{mn} \geq sup\{\frac{m(F^n)}{n}, \frac{m(F^m)}{m}\}$, ce qui donne l'item (2) du lemme.

L'item (3) est une conséquence directe de l'item (2). Il reste à montrer l'item (4).

Considérons $x \in \mathbb{R}$ qui réalise le minimum de la fonction $(F^n - id)$ (ce minimum est atteint sur $[0, 1]$ qui est compact). De même, soit $y \in \mathbb{R}$ qui réalise le maximun de $F^n - id$. Remarquons qu'il existe $z \in [x, x+1[$ tel que $z - y \in \mathbb{Z}$. Alors $F^n(x) \leq F^n(z) < F^n(x+1) = F^n(x)+1$, car F^n est une application croissante et que $F^n(x+1) = F^n(x)+1$.

Donc

$$F^n(z) - z \leq F^n(x) + 1 - z \leq F^n(x) + 1 - x = (F^n - id)(x) + 1.$$

De plus $F^n(x)-x \leq F^n(z)-z$, par choix de x. On vient de montrer que $M(F^n)-m(F^n) \in [0, 1[$. □

Corollaire 6.1. *Les suites $\frac{m(F^{2^n})}{2^n}$ et $\frac{M(F^{2^n})}{2^n}$ convergent vers une même limite $\tau(f)$, quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration : D'après l'item (3) du lemme6.2, la plus grande des suites est décroissante et la plus petite est croissante, elles convergent donc. D'après l'item (4) du lemme6.2, la différence tend vers 0, donc la limite est la même. ☐

Corollaire 6.2. *Les suites* $\{\frac{m(F^n)}{n}\}_{n\neq 0}$ *et* $\{\frac{M(F^n)}{n}\}_{n\neq 0}$ *convergent vers* $\tau(F)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$

Démonstration : On montre $\limsup \frac{M(F^n)}{n} \leq \tau(f)$ et $\liminf \frac{m(F^n)}{n} \geq \tau(f)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on choisit k tel que $\frac{M(F^{2^k})}{2^k} - \tau(f) < \varepsilon$. On ecrit $n = 2^k \cdot E(n/2^k) + m$ avec $0 \leq m < 2^k$.

Alors, d'apreès l'item (4) du lemme 6.2, on montre:

$$\frac{M(F^n)}{n} \leq \frac{E(n/2^k)M(F^{2^k})}{n} + \frac{M(F^m)}{n}.$$

Le premier terme est inférieur à $\frac{M(F^{2^k})}{2^k}$ et le second tend uniformement vers 0 (car $M(F^m)$ prend un nobre fini de valeurs. ☐

Fin de la démonstration du Théorème : Finalement pour montrer que la suite $F^n(x)/n$ converge il suffit de voir que $(F^n(x) - x)/n$ converge (car $x/n \to 0$), et $\frac{m(F^n)}{n} \leq \frac{F^n(x)-x}{n} \leq \frac{M(F^n)}{n}$, par définition de $m(F^n)$.

Pour les temps négatifs, il suffit de voir $M(F^{-1}) = -m(F)$ et $m(F^{-1}) = -M(F)$. En effet, on écrit $(F^{-1} - id)(x)$ comme $(Id - F)(F^{-1}(x))$. ☐

6.5. **nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle.** Remarquons que si F_1 et F_2 sont deux relevés de f alors $\tau(F_1) - \tau(F_2) = k = F_1 - F_2 \in \mathbb{Z}$.

La classe modulo $\mathbb{Z}$ de $\tau(f)$ est bien définie. C'est un point $\rho(f) \in S^1$ appelé nombre de rotation de f.

Remarque 25.
(1) *Si* f *est la rotation* R_α *alors* $\rho(f) = \alpha$.
(2) *Si* f *possède un point fixe alors* $\rho(f) = 0$.
(3) *Si* f *possède une orbite périodique alors* $\rho(f)$ *est rationnel c'est-à-dire* $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

6.6. **propriétés basiques du nombre de rotation : croissance et continuité.** Voici d'abord deux propriétés immédiates du nombre de translation :

Lemme 6.3. *Si* F *et* G *sont deux homéomorphismes de* $\mathbb{R}$ *commutants avec* $x \mapsto x + 1$ *et si, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \leq G(x)$ *alors* $\tau(F) \leq \tau(G)$

Lemme 6.4. *Si* F *et* G *sont deux homéomorphismes de* $\mathbb{R}$ *commutants avec* $x \mapsto x + 1$. *Si* F *et* G *commutent alors* $\tau(F \circ G) = \tau(F) + \tau(G)$.

Démonstration : Si F et G commutent, alors $((F \circ G)^n - id)(x) = (F^n - id)(G^n(x)) + (G^n - id)(x)$. ☐

Attention : l'hypothèse de commutation de F et G est essentielle dans le lemme ci-dessus. En general, le nombre de rotation n'est pas additif.

Exercice 17. *Soit* F *et* G *les fonctions de* $\mathbb{R}$ *définit par* $x \mapsto x + \beta_F \sin^2(2\pi x)$ *et* $x \mapsto x + 1 + \beta_G \sin^2(2\pi x)$, *avec* $\beta_F, \beta_G \in]0, \frac{1}{4\pi}[$. *Montrez que*

- *F et G sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ qui commutent avec la translation $T_1 \colon x \mapsto x+1$*
- *Montrez que les nombre de translations de F et de G sont nuls.*
- *Montrez que F et G ne commutent pas,*
- *Monterez que le nombre de translation de $F \circ G$ est non nul.* Indication: vous vérifierez que, pour tout x, $F(x) \geq x$ et $G(x) \geq x$. Vous montrerez alors que, pour tout x on a $F \circ G(x) > 0$.

6.7. **Homéomorphismes de nombre de rotation rationnel.** Soit $f \colon S^1 \to S^1$ un homéomorphisme préservant l'orientation. On suppose que $\rho(f)$ est rationnel, cést à dire qu'il existe F relevé de f tel que $\tau(F) \in \mathbb{Q}$. Quitte a changer le relevé F de f on peut supposer $\tau(F) \in [0, 1[$.

Lemme 6.5. *Si $\rho(f) = 0$ alors f possède un point fixe.*

Démonstration : Alors $\tau(F) = 0$. Supposons que F n'ait pas de points fixes. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $m(F) > \varepsilon$ ou $M(F) < -\varepsilon$.

Notons T_ε la translation $x \mapsto x + \varepsilon$. Dans le premier cas $\tau(F) \geq \varepsilon$ et dans le second $\tau(F) \leq -\varepsilon$ ce qui contredit dans les deux cas $\tau(F) = 0$.

□

Corollaire 6.3. *Le nombre de rotation $\rho(f)$ est rationnel si et seulement si f possède des orbite périodique. Si q est la période d'un point périodique, alors $\rho(f)$ est de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.*

Démonstration : Si $\rho(f) = \frac{p}{q} \mod[\mathbb{Z}]$ alors $\rho(f^q) = 0$ ce qui implique que f^q possède un point fixe x qui est un point périodique de f. □

Remarque 26. Il existe des homómorphismes de S^1 possèdant des points fixes isolé.

Par exemple $A_{0,\beta} \colon x \mapsto x + \beta \sin(2\pi x)$, $\beta \in [\frac{-1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \setminus \{0\}$.

Notons $\mathcal{A}_{0,\beta}$ le relevé de $A_{0,\beta}$ tel que 0 soit un point fixe de $\mathcal{A}_{0,\beta}$.

Remarquons que $m(\mathcal{A}_{0,\beta}) = -|\beta|$ et $M(\mathcal{A}_{0,\beta}) = |\beta|$. On en déduit que $T_\alpha \circ \mathcal{A}_{0,\beta}$ aura des point fixes pour tout $\alpha \in [-\beta, \beta]$.

en conséquence

$$\rho(R_\alpha \circ A_{0,\beta} = 0 = \rho(A_{0,\beta}), \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in [-\beta, \beta].$$

Cet exemple montre: que le nombre de rotation n'est pas additif.

Quand un nombre de rotation est rationnel, pour faire changer ce nombre de rotation il faut détruire toutes les orbites périodiques....

6.8. **Homéomorphisme de nombre de rotation irrationnel.**

Théorème 8. *Soit f un homéomorphisme du cercle tel que $\rho(f)$ soit irrationnel. Il existe une application continue croissante $H\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui commute avec $x \mapsto x+1$ et telle que $H \circ F = T_{\tau(F)} \circ H$ pour tout relevé F de f. De plus H est unique à addition d'une constante près*

Avant de prouver ce résultat, laisser moi le commenter un peu:

: - L'application H serait un homéomorphisme si j'avais écrit "strictement croissant". Mais H peu ne pas être injectif. L'idée est que H peut avoir des "paliers".

: - L'application H passe au quotient en une application $h\colon S^1 \to S^1$ de degré topologique 1.

: - L'application h est une semi conjugaison de f à la rotation $R_{\rho(f)}$.:

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & S^1 & \rightarrow & S^1 & \\ h & \downarrow & & \downarrow & h \\ & S^1 & \rightarrow & S^1 & \\ & & R_{\rho(f)} & & \end{array}$$

: - Pour tout x, $H^{-1}(x)$ est un segment I_x et $H(I_x) = I_{R_{\tau(f)}(x)}$

On munit $homeo(\mathbb{R})$ de l'ordre partiel $G_1 \preceq G_2$ si $G_1 = G_2$ ou si $G_1(x) < G_2(x)$ pour tout x. On note $G_1 \prec G_2$ si $G_1(x) < G_2(x)$ pour tout x (cad $G_1 \preceq G_2$ et $G_1 \neq G_2$.

Soit F un relèvement de f, et soit $\tau = \tau(F) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Notons $\mathcal{G}_F$ le sous-groupe de $homeo(\mathbb{R})$ engendré par F et par la translation $x \mapsto x+1$. Remarquons que tout élement de $\mathcal{G}_F$ peut s'écrire $G = F^m + n$.

Notons $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et τ.

Lemme 6.6. *$\mathcal{G}_F$ est totalement ordonnée pour $\prec$ et l'application $F^m+n \mapsto m\cdot\tau(F^m+n)$ est un isomorphisme strictement croissant de $\mathcal{G}_F$ sur Γ_τ.*

Démonstration : Remarquons que, pour tout $(m,n) \neq (0,0)$ l'homéomorphisme $F^m + n$ n'a aucun point fixe: donc $F^m + n \prec Id$ ou $Id \prec F^m + n$, par le théorème des valeurs intermédiaires.

Tout ces applications sont strictement croissantes: on en deduit que si $G_1 \prec G_2$ alors $G_3 \circ G_1 \prec G_3 \circ G_2$, pour tous $G_i \in \mathcal{G}_F$.

Soient G_1 et G_2 deux élement distincts de $\mathcal{G}_F$. Alors $G_2{-}1 \circ G_1$ est un élément de $\mathcal{G}_F$ donc est $\prec id$ ou $\succ id$ et donc $G_1 \prec G_2$ ou $G_2 \prec G_1$, respectivement.

Remarquons que, comme $\mathcal{G}_F$ est un groupe commutatif, alors $\tau(F^m+n) = m\tau + k$. Le nombre de rotation est un morphisme de $\mathcal{G}_F$ dans Γ_τ. Ce morphisme est injectif car τ est irrationnel. Il est croissant comme on l'a déja remarqué □

Corollaire 6.4. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on considère $\mathcal{G}_F(x) = \{G(x), G \in \mathcal{G}_F\}$ et $\Gamma_\tau y = \{y + m\tau + n\}$. Il existe une bijection croissante $H_{x,y}$ de $\mathcal{G}_F(x)$ sur Γ_τ qui à $G(x)$ associe $y + \tau(G)$.*

Démonstration : On a vu que l'application que à G associe $G(x)$ est injective et strictement croissante, donc est une bijection croissante, et de même l'application qui à G associe son nombre de translation. □

Corollaire 6.5. *L'application $H_{x,y}$ se prolonge de façon unique en une application croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus elle commute avec $s \mapsto s+1$ et $H_{x,y} \circ F = R_\tau \circ H_{x,y}$.*

Démonstration : Le prolongement unique est du au fait que $\Gamma_\tau y$ est dense dans $\mathbb{R}$, car τ est irrationnel.

L'unicité fait qu'il suffit de vérifer les deux autres propriétés sur la partie $\mathcal{G}_F(x)$. On considère un élément $G(x) \in \mathcal{G}_F(x)$

$$H_{x,y}(G(x)+1) = y + \tau_{G+1} = y + \tau_G + 1,$$

et

$$H_{x,y}(F(G(x)) = y + \tau_{F\circ G} = (y + \tau_G) + \tau.$$

□

Pour montrer le théorème il suffit à présent de montrer l'unicité, à une constante près. Pour cela il suffit de remarquer que, si deux application coincident en un point z, elles coinciendnt le long de l'orbite pour $\mathcal{G}_F$, l'image étant l'orbite pour Γ_τ de l'image de z. Cette orbite étant dense et les applications étant croisssante, c'est l'unicité dans le lemme **??** qui assure l'égalité.

L'application $H_{x,y} - H_{x,y}(0)$ convient en envoie 0 sur 0 donc coincide avec $H_{0,0}$.

7. Minimaux

Soit $G \hookrightarrow Homeo(X)$ une action d'un groupe sur un espace X. On rappel qu'un ensemble *minimal* sous l'action du groupe G est une partie $Y \subset X$ telle que

- Y est invariante sous G: quelque soit $g \in G$ on a $g(Y) = Y$.
- Y est fermée
- Y est minimal pour cet propriétés: si $Z \subset Y$ est une partie fermée invariante alors $Y = Z$.

Une caractérisaton est que Y est minimal si pour tout $x \in Y$ de l'orbite de x est dense dans Y:

$$\forall x \in Y, \quad \overline{Orb(x, G)} = Y.$$

On a vu que sur les espaces compacts toute action admet un minimal. Ce n'est pas vrai en général sur les espaces non compacts. Voici un exemple abstrait, un peu trop compliqué.

Exemple 5. *On considere l'espace métrique compact* $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ *avec comme distance*

$$d((x_i)(y_i)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|i|}|x_i - y_i|.$$

On note X *la partie non-compacte de* $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ *dont les points n'ont qu'un nombre fini de coordonnée égale à* 0 *ou à* 1*:*

$$X = \{(x_i) \in [0,1]^{\mathbb{Z}} | \#(\{i, x_i \in \{0,1\}\}) < \infty\}$$

On consière un homéomorphisme de $[0,1]$ *tel que* $f(x) < x$ *sir* $x \neq 0, 1$*. Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$*, on défini alors* f_i*, l'homéomorphisme de* $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ *qui consiste à appliquer* f *à la* i^{eme} *coordonnee, et à laisser les autres inchangées.*

Alors le groupe engendre par les f_i *agit naturellement sur* X*, car* X *est un ensemble invariant par chacun des* f_i*. De plus l'action du groupe* $< f_i, i \in ZZ >$ *sur* X *n'a pas de minimal.*

Démonstration : En effet, pour tout $x = (x_i) \in X$, fixons i_0 tel que $x_{i_0} \notin \{0, 1\}$. L'orbite de x s'accumule sur le point (y_i) definie par $y_i = x_i$ pour $i \neq i_0$ et $y_{i_0} = 0$. Par contre l'orbite de y est contenue dans le fermé $\{x_{i_0} = 0\}$.

□

Le but de cette section est de caractériser les actions sur $[0,1]$, S^1 ou $\mathbb{R}$ possèdant des minimaux ainsi que de classifier les minimaux possibles.

7.1. **Le segment.**

Proposition 7.1. *Soit* $G \subset Homeo_+([0,1])$ *un groupe agissant sur* $[0,1]$*. Alors tout minimal sous l'action de* G *est un point fixe commun à tous les éléments de* G*.*

Démonstration : C'est tout simple: pour tout $x \in [0,1]$, $y = \inf G \cdot x$ est un point fixe commun aux éléments de G. □

7.2. **Le cercle.**

Théorème 9. *Soit $G \subset Homeo_+(S^1)$ un groupe agissant sur le cercle S^1 en préservant l'orientation. Alors on a les 3 possibilitiés suivantes (qui s'excluent deux a deux):*

(1) *L'action est minimale: toute orbite est dense.*
(2) *Tout minimal est une orbite finie. Dans ce cas toutes les orbites finies ont meme cardinal.*
(3) *Il existe un unique minimal qui est homéomorphe à l'esemble de Cantor.*

Démonstration :
On suppose que l'action de G n'est pas minimale (sinon il n'y a rien a faire).
Si G a une orbite finie. On oriente cycliquement cette orbite $x_0, \dots, x_{n-1}$, $x_n = x_0$. On note $I_i = [x_i, x_{i+1}]$. Alors chaque élément $g \in G$ induit une permutation des I_i et pour tout i, j il existe $g \in G$ tel que $g(I_i) = I_j$.

On en déduit que si $K \subset S^1$ est un fermé invariant, alors $K \cap I_i \neq \emptyset$ pour tout i. Notons $x_i = \inf K \cap I_i$. Alors $\{x_i\}$ est un fermé invariant contenu dans K. Donc si K est minimal, $K \cap I_i$ est réduit à un point. Ce qui termine la preuve dans ce cas.
Si G n'a aucune orbite finie. On a supposé que G possède une orbite x_0 qui n'est ni dense ni finie. L'adhérence de l'orbite $G \cdot x_0$ contient un minimal K qui n'est pas fini, et est differente de S^1.

Soit I une composant connexe de $S^1 \setminus K$. C'est un itervalle ouvert. Remarquons que, pour tout $g \in G$ on a $g(I) = I$ ou $g(I) \cap I = \emptyset$.

Affirmation 14. *Il existe une famille infinie $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$ telle que les $g_n(I)$ soient deux a deux disjoints.*

Démonstration : Dans le cas contraire, les orbites des extremites de I seraient finies, contredisant l'hypothèse. □

Remarquons que la somme des longueurs des $g_n(I)$ est majorée par 1, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \ell(g_n(I)) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $x \in I$, l'adhérence de l'orbite de x rencontre K. Mais $\overline{G \cdot x} \cap K$ est un compact invariant par G et contenu dans K donc est egal a K. Donc $K \subset \overline{G \cdot x}$.

On a montré que tout orbite de S^1 contien le minimal K dans son adhérence. En particulier K est l'unique minimal. □

On conclut la preuve du Théorème par la proposition suivante:

Proposition 7.2. *Si K est un un minimal d'une action sur S^1, que $K \neq S^1$ et K n'est pas fini, alors K est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

Plus exactement, il existe un homéomorphisme de S^1 qui envoie K sur l'ensemble de Cantor diadique.

Démonstration : K est d'interieur vide: sinon son bord serait un compact invariant plus petit. Il est donc totalement discontinue (les composante connexes sont des points). De plus il est sans point isolés: en effet le dérivé de K (K moins l'ensemble des points isolés) serait éaglement un compact invariant plus petit. □

Le Cantor diadique $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points de $[0,1]$ qui admettent un dévelloppement en base 3 qui n'utilise pas le chiffre 1. Autrement dit il consiste a considérer la suite de compact définie par récurrence de façon suivante:

- $C_0 = [0,1] =,$
- $C_1 = C_0 \setminus]1/3, 2/3[= [0,1/3] \cup [2/3,1] = I_0 \cup I_1$
- $$\begin{array}{rcl} C_2 & = & C_1 \setminus \bigcup_{k\equiv 1[2]} \bigcup]\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}[\\ & = & [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\ & = & I_{0,0} \cup I_{0,1} \cup I_{1,0} \cup I_{1,1} \end{array}$$
- ...
- $$C_{i+1} = C_i \setminus \bigcup_{k\equiv 1[3^{i+1}]}]\frac{k}{3^{i+1}}, \frac{k+1}{3^{i+1}}[= \bigcup_{\mu\in\{0,1\}^{i+1}} I_\mu$$
  où, pour tout $\mu = (\varepsilon_j)_{1\leq j\leq i+1}$ le segment $I\mu$ est défini par
  $$I_\varepsilon = [\sum_{j=1}^{i+1} \frac{2}{3^j}\varepsilon_j, \sum_{j=1}^{i+1} \frac{2}{3^j}\varepsilon_j + \frac{1}{3^{i+1}}]$$
- etc...

Alors $\mathcal{C} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$ est l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vide donc est non vide.

On remarque que pour tout i les segments $(I_{mu})_{\mu\in\{0,1\}^i}$ sont deux à deux disjoints. La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ induit donc sur cet ensemble une relation d'ordre. On remarque que pour tout $\mu = (\varepsilon_j)_{1\leq j\leq i}$ on a $I_{\mu 0}$ et I_{mu1} sont les deux seules conposantes de C_{i+1} contenues dans I_μ. De plus $I_{\mu_0} < I_{\mu_1}$. On en déduit que, pour tout i, l'ordre induit par celui de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des les segments I_μ, $\mu \in \{0,1\}^i$ coincide avec l'ordre lexicographique sur les mots μ.

Pour tout $x \in \mathcal{C}$ on note $\mu(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ la suite infinie $\mu(x) = (\varepsilon_j(x))_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\{x\} = \bigcap_i I_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i}$$

On munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ de la distance $\delta((a_j)(b_j)) = \sum_j \frac{1}{2^j}|a_j - _j|$, et de l'ordre lexicographique. Par construction on obtient:

Lemme 7.1. *L'application $x \mapsto \mu(x)$ est un homéomorphisme croissant de $\mathcal{C}$, muni de la topologie et de l'ordre induit de $\mathbb{R}$, sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la distance δ et d l'ordre lexicographique.*

Lemme 7.2. *Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact d'intérieur vide et sans points isolé. Alors il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui envoie K sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration : La preuve consiste à refaire pour K la construction que nous avions faite pour $\mathcal{C}$.

On contruit par récurence une suite de familles de segments $(J_\mu)_{\mu\in\{0,1\}^i}$de la façon suivante:

- $J = [\inf K, \sup K] = [a,b]$

- On choisit un point $x \in]a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}[$ tel que $x \notin K$. C'est possible car K est d'intérieur vide. On note $J_0 = [a, \sup K \cap [a, x]]$ et $J_0 = [\inf K \cap [x, b], b]$, et on note $J_0 = [a_0, b_0]$ $J_1 = [a_1, b_1]$
- Pour tout $\mu \in \{0,1\}^i$ on note $x_\mu \in]a_\mu + \frac{b_\mu - a_\mu}{3}, b_\mu - \frac{b_\mu - a_\mu}{3}[$ tel que $x_\mu \notin K$. On note $J_{\mu 0} = [a_\mu, \sup K \cap [a_\mu, x_\mu]]$ et $J_0 = [\inf K \cap [x_\mu, b_\mu], b_\mu]$, et on note $J_{\mu 0} = [a_{\mu 0}, b_{\mu 0}]$ $J_1 = [a_{\mu 1}, b_{\mu 1}]$.

On remarque que $J_\mu \cap K = (J_{\mu 0} \cap K) \cup (J_{\mu_1} \cap K)$, que les segments $J_{\mu 0}$ et $J_{\mu 1}$ sont disjoints, et que $J_{\mu 0}$ est inférieur à $J_{\mu 1}$. Finalement on remarque que la longueur $\ell(J_{\mu i})$ est inférieure a $\frac{2}{3}\ell(J_\mu)$. On en déduit que la longueur de J_μ est inférieure a $(\frac{2}{3})^{\ell(\mu)}$, ou $\ell(\mu)$ est la longueur du mot μ.

On considère l'application $x \mapsto \nu(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ qui à x associe le mot infini tel que

$$\{x\} = \bigcap_i J_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_i}$$

On vérifie que c'est un homéomorphisme croissant.

L'application $\mu^{-1} \circ \nu \colon K \to \mathcal{C}$ est donc un homéomorphisme croissant.

On complète cet homéomorphisme de façon affine sur chaque composante du complémentaire.

□

C'est en fait une propriété plus générale, valable sur des ensembles no plongés dans $\mathbb{R}$.

Lemme 7.3. *Tout compact metrique totalement discontinu sans point isolé est homéomorphe à $\mathcal{C}$.*

7.3. **La droite: un exemple d'action sans minimal.** Soit $I_n \subset \mathbb{R}$ une suite strictement croissante de segment compacts d'intérieur non-vide, tels que I_n est contenu dans l'interieur de I_{n+1} et que $\mathbb{R} = \bigcup_n I_n$. Soit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme vérifiant

- $f_n(x) = x$ si $x \notin I_n$
- $f_n(x) > x$ si $x \in Int(I_n)$
- $f_n(I_{n-1})$ est disjoint de l'intérieur de I_n

Proposition 7.3. *Le groupe engendé par les f_n n'a pas de minimal sur $\mathbb{R}$.*

Lemme 7.4. *Notons $a_n = \sup I_n$, et notons F_n l'adhérence de l'orbite de a_n. Alors*

(1) $F_{n+1} \subset F_n$
(2) $F_n \cap Int I_n = \emptyset$
(3) $\bigcap F_n = \emptyset$

Démonstration : L'orbite de a_n pour f_{n+1} converge vers a_{n+1}. On en déduit que $F_{n+1} \subset F_n$. Regardons un plus petit mot $i_1 \ldots . i_k$ tel qu'il existe $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$ tels que $f_{i_k}^{\varepsilon_k} \circ \ldots . \circ f_{i_1}^{\varepsilon_1}$ envoie l'un des a_i dans l'intérieur de I_i. Notons $b_0 = a_n$, $b_1 = f_{i_1}^{\varepsilon_1}(a_n)$, ..., $b_{j+1} = f_{i_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}}(b_j)$.

Ce mot $(i_1, \ldots, i_k)$ ne contient aucune lettre $i_j \leq i$. En effet si i_j est l'une des lettres, f_{i_j} est sans effet sur b_{j-1} a moins que le point b_{j-1} soit déja revenu dans l'itérieur de I_i ce qui signifie un mot plus court.

Considérons $\ell = \sup\{i_j, j \in \{1, \ldots, k\}\}$. Remarquons que $\ell > i$. Sinon toute les lettres sont $f_i^{\pm 1}$.

Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des j tels que $i_j = \ell$. Notons $\mu = \inf \mathcal{J}$. Alors $b_\mu \notin I_{\ell-1}$. Donc les f_n avec $n < \ell$ sont sans effets sur b_μ. On en déduit que $\mu + 1 \in \mathcal{J}$. Sinon le mot ne serait pas le plus court.

Si $\varepsilon_{\mu+1} = -\varepsilon_\mu$, le mot nétait pas reduit, donc pas le plus court. Donc $\varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_\mu$. On en déduit $\mu + 2 \in \mathcal{J}$ et $\varepsilon_{\mu+2} = \varepsilon_\mu$. Ce raisonnement se poursuit, par induction, indefiniment, amenant une contradiction avec le fait que $b_k \in I_i$.

□

7.4. **La droite: Critères pour l'existence d'un minimal.** On vérifie facilement le lemme suivant:

Lemme 7.5. *S'il existe x tel que $G.x$ admette un majorant (ou un minorant); autrement dit si*

$$\inf\{|\inf G \cdot x|, |\sup G \cdot x|\} < +\infty,$$

alors, toute orbite de G est ou bien majorée, ou bien minorée. Tout minimal est un point fixe commun a tout élément de G. L'adhérence de toute orbite contient un tel minimal.

Démonstration : Supposons que $G.x$ est minoré et notons $y = \inf G \cdot x$. Alors y est un point fixe commun aux élément de G. Comme les éléments de G prérvent l'orientation, on en déduit que y est un majorant des orbites Gz pour $z < y$ et un minorant des orbites Gz avec $z > y$. □

Lemme 7.6. *S'il existe un segment compact J tel que toute orbite rencontre J, alors l'adhérence de toute orbite contient un fermé minimal.*

Démonstration : Quitte à augmenter un peu J, on peut supposer que toute orbite rencontre l'intérieur de J.

Etant donné x, on considere l'ensemble des compacts contenus dans $Gx \cap J$ qui sont intersection d'un fermé invariant avec J, muni de l'inclusion. C'est un ensemble inductif, on prend un plus petit élément K.

Pour tout $y \in K$, l'adhérence de l'orbite de y intersection avec J est un compact plus petit donc égal. On en déduit que l'adérence de toute orbite contient l'union des orbites de K.

Pour terminer, il reste a voir que l'union des orbites de K est un ferme. Soit z dan l'adhérence du saturé de K. L'orbite de z rencontre l'interieur de J, par hypothese. Elle est accumulée par des points dans J d'orbites de K. Ces points sont dans K. Donc le point limite aussi. Donc z appartient a l'orbite d'un point de K.

□

Corollaire 7.1. *S'il existe $g \in G$ sans point fixe, alors l'adhérence de toute orbite contient un minimal.*

Plus généralement: S'il existe une famille finie $g_1, \ldots g_n$ sans point fixe commun, alors l'adhérence de toute orbite contient un minimal.

Démonstration : en tout point x de $\mathbb{R}$ notons $f(x) = \sup\{g_i^{\pm 1}(x), i \in \{1, \ldots, n\}\}$. C'est une fonction continue croissante, dont les orbites sont dans celles de G. Comme il n'y a pas de point fixe commun $f(x) > x$. Donc toutes les orbites vont de l'infini à l'infini,et toutes les orbites rencontrent $[0, f(0)]$. $\square$ Plus généralement , il suffit:

Corollaire 7.2. *S'il existe une famille $\mathcal{G} \subset G$ telle qu' en tout x on a $0 < \sup_{g\in\mathcal{G}} g(x) - x < \infty$...*

Démonstration : La fonction $x \mapsto \sup_{g\in\mathcal{G}} g(x)$ est alors croissante, et semi continue inférieurement. Cela suffit a montrer que toute orbite tend vers $+\infty$. On en deduit que, pour tout x il existe une suite g_i tel que $x_i = g_i(x_{i-1})$ tend vers $+\infty$ et rencontre $[0, f(0)]$. $\square$

Corollaire 7.3. *Si G est finîment engendré, il possède un minimal.*

7.5. **La droite: Classification des minimaux.** Notons $\mathcal{C}$ l'unions d'ensemble de Cantor contenus dans $[2i, 2i + 1]$.

Lemme 7.7. *Soit $G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ ayant un minimal K.alors l'adhérence de toute orbite contient un minimal. De plus, on a les possibilités exclusives suivantes:*

1. *toutes les orbites sont denses: $K = \mathbb{R}$ est l'unique minimal.*
2. *tous les minimaux sont des points fixes de l'action de G.*
3. *tous les minimaux sont chacun une orbite fermee de G, qui est un ensemble discret. De plus il existe $g \in G$ sans points fixes tel que ces minimaux soient chacun une orbite de g.*
4. *il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ tel que l'image de K soit $\mathcal{C}$. K est de plus l'unique minimal de G et est contenu dans l'adhérence de toute orbite.*

Démonstration : On suppose que G possède un minimal K. Toute orbite de K est dense dans K.

1. Si $K = \mathbb{R}$, toute orbite est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui est le premier cas.
2. Si K est majore ou minore alors K est reduit a un point fixe commun aux element du groupe (en effet $supK$ ou $infK$ sont des fermes invariants plus petits, donc egaux a K). Dans ce cas toute orbite est majoree ou minore et tout minimal est un point fixe: on est dans le second cas.
3. si K possède un point isolé, alors tous les points de K sont isolés: en effet le derive de K est alors invariant et strictement plus petit, donc vide. K est dont une suite d epoint allant de moins l'infini a plus l'infini. Ordonons la de façon croissante x_i. Soit $f \in G$ tel que $f(x_0) = x_1$ alors $f(x_n) = x_{n+1}$ car f laisse invariant la suite et est croissante.

   On en déduit que toute orbite rencontre $[x_0, x_1]$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$Gx = \bigcup_i f^i(X.x \cap [x_0, x_1]).$$
   On considere le centralisateur $C(x_0)$ de x_0. Les element de ce centrlisateur fixent tous les x_i. En particulier ils laissent invairant $[x_0, x_1]$ et induisent une action sur $[x_0, x_1]$ Tout minimal pour cette action est un point fixe commun aux element de $X(x_0)$. On en déduit que les minimaux de G sont les orbites par f des points fixes communs au centralisateur $C(x_0)$.

(4) Si K est sans point isole. Alors il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui envoie K ur $\mathcal{C}$. De plus comme toute orbite de K es dense dans K, étant donné une composante connexe I de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$, il existe $g_i \in G$ tel que $g_i(I)$ converge vers un point de K.

On en deduit que tout orbite de $\mathbb{R}$ est adhérente a K.

□

Corollaire 7.4. *Soit G un groupe agissant sur $\mathbb{R}$, et possèdant au moins 1 minimal. Alors l'union des minimaux est fermée dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : La reponse est directe s'il existe un unique minimal: c'est le cas d'une action minmal ou d'un minimal homéomorphe à $\widetilde{\mathcal{C}}$. L'ensemble des points fixes de l'action est aussi un fermé. Reste je cas des orbites fermées discretes. Rappelons que, dans ce cas, il existe $\in G$ tel que les minimaux soient les orbites de g qui sont invariantes par G. On verifie faclement que si $x_n \to x$ et si $Gx_n = Orb(x_n, g)$ alors $Gx = Orb(x, g)$. □

7.6. **Hierarchie des d'orbites.** Soit $G \subset homeo(X)$ un groupe agissant sur un espace metrique X.

On considère la relation d'équivalence sur X définie par

$$x \simeq y \Longleftrightarrow \overline{G.x} = \overline{G.y}$$

Autrement dit, l'orbite de x s'acccumle sur y et vice versa.

On note $\widetilde{X}$ l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\simeq$. L'ensemble $\widetilde{X}$ est muni d'un ordre naturel: $\tilde{x} \leq \tilde{y}$ si $\overline{G.x} \subset \overline{G.y}$, ou x et y sont des representant des classes $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$.

Les minimaux quand ils existent, sont les points minimaux pour cet ordre.

- On dit que x est *de hauteur* 0 si x appartient à un minimal de G.
- On dit que x est de hauteur 1 si x n'est pas de hauteur 0 et si toute orbite contenue dans $\overline{G.x}$ est ou bien de hauteur 0, ou bien équivalente à x. Notons X_0 l'ensemble des point de hauteur 0: c'est un ensemble invariant par G. On considère l'action de G sur $X - X_0$ induite restriction de celle sur X. Le point x est de hauteur 1 s'il appartient à $X - X_0$ est s'il appartient à un minimal de l'action de G sur $X - X_0$.
- On définit ainsi les points de hauteur $k+1$ comme l'ensemble des points qui ne sont pas de hauteur k, et tel que tout $y \in \overline{G.x}$ est ou bien de hauteur k, ou bien équivalent à x. Cela revient a considérer les minimaux de l'action de G sur le complémentaire $X - X_k$ de l'enble des point de hauteur k.

On dit qu'une orbite est *de hauteur fini* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que cette orbite soit de hauteur k.

exemple:

Proposition 7.4. *Si $G \subset Homeo_+(\mathbb{R})$ est un groupe abélien finîment engendré agissant sur $\mathbb{R}$, alors tout feuille est de hauteur finie, bornee par deux fois le nombre de generateurs k de G moins 1. De plus, pour tout $0 \leq i \leq k$, l'union des points de hauteurs inférieure ou égale à i est fermé.*

Démonstration : On procède par récurrence sur le nombre k de générateurs de G, le cas $k = 1$ étant facile: si $G =< g >$ alors ou bien g est sans point fixe, alors les minimaux sont les orbites de g. Ou bien g possède un point fixe. Alors toute orbite de la restriction de g à $I\!R \setminus Fix(g)$ est un minimal de cette restriction: dans ce cas, les orbites non fixes sont des points de hauteur 1. La hauteur des feuilles est donc au plus $2.1 - 1 = 1$.

Supposons donc la proposition prouvee pour tout $i < k$, et déduisons en la proposition pour k. Soit X_0 l'ensemble des points de hauteurs 0, c'est à dire l'union des minimaux de G. Nous avons vu que c'est un fermé de $\mathbb{R}$. Chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus X_0$ est un intervalle ouvert I.

Notons G_I le stabilisateur de I.

Affirmation 15.
- *si G possède des points fixes globaux, alors le stabilisateur de I est G*
- *si G n'a pas d epoints fixes globaux alors G_I a au plus $k - 1$ générateurs.*

Démonstration : L estabilistaeur est un sous gorupe de $\mathbb{Z}^k$ avec k generateurs, donc serait un reseau de $\mathbb{Z}^k$, On aurait alors que pour tout $g \in G$ il existe un itr tel que $g^i \in G_I$. Mais si $g(I) > I$ alors la suite $g^(I)$ est monotone, donc aucune puisasnde de g n'appartient a G_I. Donc, si $G_I \neq G$ alors G_I a strictement moins de generateurs que G □

□

8. Un critère pour prouver qu'un groupe est libre: le ping-pong

8.1. **semi-groupe (monoide) libre a 2ℓ-generateurs.** On considère $I_0 = \{\emptyset\}$ et pour tout entier $k > 0$, on note $\mathcal{I}_k = \{1, \dots, \ell\}^k \times \{-1, +1\}^k$. On note $\mathcal{I}$ l'union disjointe des $\mathcal{I}_k$. C'est l'ensemble des *mots finis* dont les lettres sont les $(i, \epsilon) \in \{1, \dots, l\} \times \{-1, 1\}$. Un élément I de $\mathcal{I}$ est une suite finie $I = ((i_1, \varepsilon_1), \dots, (i_k, \varepsilon_k))$. Le nombre k s'appelle la *longueur* du mot et est notée $\ell(I)$.

On munit $\mathcal{I}$ de la loi de *concaténation* qui consiste à mettre bout a bout les mots. Si $x = (x_i, \varepsilon_i)_{i \in \{1,\dots,l\}}$ et $y = ((y_j, \delta_j)_{j \in \{1,\dots,m\}}$ alors $xy = (z_k, \mu_k)_{k \in \{1,\dots,l+m\}}$ avec $(z_i, \mu_i) = (x_i, \varepsilon_i)$ pour $i \in \{1, \dots, l\}$ et $(z_{l+j}, \mu_{l+j}) = (y_j, \delta_j)$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$.

Le mot vide est l'élément neutre (à droite et à gauche) de cette loi.

8.2. **réduction d'un mot.** On dit qu'un mot y est une réduction d'un mot x si on peut ecrire $x = a((i, \varepsilon)(i, -\varepsilon))b$ et $y = ab$. Autrement dit, le mot y est obtenu à partir du mot x en supprimant une paire $((i, \varepsilon)(i, -\varepsilon))$.

On dit que deux mots x et y sont équivalents s'il existe une suite finie $x = x_0, \dots, x_k = y$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$ on ait ou bien x_i est une réduction de x_{i+1} ou bien x_{i+1} est une réduction de x_i.

Lemme 8.1. *Cette relation est une relation déquivalence. On note $x \simeq y$.*

Un mot $I = ((i_1, \varepsilon_1), \dots, (i_k, \varepsilon_k))$ est dit *réduit* si l'on a

$$\forall j \in \{1, \dots, k-1\}, (i_j = i_{j+1}) \Rightarrow (\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}).$$

A tout mot fini $I = ((i_1, \varepsilon_1), \dots, (i_k, \varepsilon_k))$ on associe un mot réduit $reduc(I)$ de la faon suivante:

- si I est réduit $reduc(I) = I$.
- si I n'est pas réduit notons I_1 le mot obtenu de façon suivante. On considère le plus petit j tel que $(i_{j+1}, \varepsilon_{j+1}) = (i_j, -\varepsilon_j)$ et supprime la paire $j, j+1$ du mot. On obtient un mot de longueur strictment plus petite. Aprese au plus $\ell(I)/2$ telle operation on obtient un mot réduit.

8.3. **Le groupe libre a ℓ-générateurs.** On vérifie facilement que

Lemme 8.2.

$$(x \simeq y \ and \ z \simeq w) \Longrightarrow xz \simeq yw$$

On notera $e_i = (i, 1)$ et $e_i^{-1} = (i, -1)$.

Lemme 8.3. *Le quotient de $\mathcal{I}$ par la relation $\simeq$ est un groupe noté $\mathbb{F}_\ell$, engendré par la famille $e_1, \dots, e_\ell$ et appelé le groupe libre à ℓ générateurs.*

Le groupe $\mathbb{F}_\ell$ est caractérisé par la propritété universelle suivante:

Lemme 8.4. *Etant donné une famille finie $(x_1, \dots, x_\ell)$ d'éléments d'un groupe G. Il existe un unique homomorphisme de groupe $\rho \colon \mathbb{F}_\ell \to G$ tel que $\rho(e_i) = x_i$.*

Démonstration : On définit d'abord une application φ du monoide libre à 2ℓ générateurs, à valeurs dans G, qui à la suite (i_j, ε_j) associe le produit $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$.

On vérifie facilement que $\varphi(x.y) = \varphi(x)\varphi(y)$ et que $\varphi((i, -1)) = \varphi(i, 1)^{-1}$

On vérifie sans peine que, si y est une réduction de x alors $\varphi(x) = \varphi(y)$.

On en déduit que si $x \simeq y$ alors $\varphi(x) = \varphi(y)$. L'application φ passe donc au quotient par $\simeq$ en une application $\rho\colon \mathbb{F}_\ell \to G$ qui envoie e_i sur x_i.

On vérifie que ρ est un morphisme.

L'unicité vient du fait qu'un morphisme est entièrement détermine par l'image de ses générateurs. □

Remarque 27. *Si $G, \{y_1, \dots, y_\ell)$ possède cette même propriété universelle, alors il existe un isomorphisme de groupe envoyant e_i sur y_i.*

On appelle groupe libre a ℓ générateur tout groupe isomorphe a $\mathbb{F}_\ell$.

8.4. **Groupes définis par générateurs et relations.** Etant donné un groupe G ayant une famille finie $x_1, \dots, x_k$ de générateurs, on considère le morphisme φ de $\mathbb{F}_k$ dans G qui associe x_i à $(i, 1)$. Alors G est isomorphe au quotient de $\mathbb{F}_k$ par le noyau du morphisme.

Si le noyau du morphisme φ est le sous-groupe distingué engendré par la famille $\{\omega_j\}_{j\in J}$ d'élélents de $\mathbb{F}_k$, on dit que G est *le groupe engendré par les générateurs x_i et les relations ω_j*. La donnée des x_i et des ω_j est une *présentation* du groupe G. On note:

$$G =< x_1, \dots, x_k | \omega_j, j \in J > .$$

On dit que le groupe G est *de présentation finie* si le noyau admet une partie génératrice (en temps que sous-groupe distingué) finie.

8.5. **Le ping pong à ℓ générateurs.** Soit X un espace topologique, et $f, g \in Homeo(X)$.

On dit que f, g forment un ping-pong s'il existe $A, B, C, D \subset X$ deux a deux disjoints, tel que

- $X \setminus A \cup B \cup C \cup D \neq \emptyset$.
- $f(X \setminus B) \subset A$
- $f^{-1}(X \setminus A) \subset B$
- $g(X \setminus D) \subset C$
- $g^{-1}(X \setminus C) \subset D$

Remarquons que $f(X \setminus B) \subset A \iff f^{-1}(X \setminus A) \subset B$ En effet $X \setminus B \subset f^{-1}(A)$. Donc $X \setminus f^{-1}(A) \subset X \setminus (X \setminus B)$ soit $f^{-1}(X \setminus A) \subset B$.

Plus généralement, $f_1, \dots, f_\ell$ forment un Ping Pong a ℓ générateurs s'il existes des parties $A_1, B_1, \dots A_\ell, B_\ell$ deux à deux disjointes telles que, pour tout i on ait

$$f_i(X \setminus B_i) \subset A_i.$$

Théorème 10. *Si $f_1, \dots f_\ell$ forment un ping pong, alors le groupe engendré par les f_i est un groupe libre à ℓ générateurs.*

Plus precsiement le morphisme de $\mathbb{F}_\ell \to Homeo(X)$ defini par $e_i \mapsto f_i$ est injectif.

Démonstration : Comme chaque élément de $\mathbb{F}_\ell$ est représenté par un mot réduit, il suffit de verifier que l'application naturelle sur le monoide libre est non nulle sur les mots réduit.

Fixons $p_{2i-1} \in A_i, p_{2i} \in B_i$, pour tout i.

Soit $x = (i_j, \varepsilon_j)$ un mot réduit. On montre par récurence sur la longueur $\ell(x)$ que, il existe $r \in \{1, \ldots, 2\ell$ tel que $\rho(p_j) \in A_i$ si $(i_1, \varepsilon_k) = (i, 1)$ et $\rho(p_j) \in B_i$ si $(i_1, \varepsilon_k) = (i, -1)$.

En particulier, $\rho(x)$ n'est pas l'identité. □

Remarque 28. *La preuve du théorème montre également que tout mot de $\mathbb{F}_\ell$ possède une unique écriture par un mot réduit: en effet, on est cappable d'exhiber sa première letter, et on applique le même raisonnement au mot privé de sa première lettre, obtenant la seconde lettre, et aisni de suite.*

8.6. **exemples de Ping Pong.**

Théorème 11. *On considère l'action naturelle de $PGL(2, \mathbb{R})$ sur $S^1 = \mathbb{RP}^1$. Soient f et g deux élément hyperboliques de $PGL(2, \mathbb{R})$, dont les directions propres sont deux a deux distinctes.*

Alors il existe $n > 0$ tel que le groupe engendré par f^n et b^n soit libre.

Démonstration : On choisit des segment A B C D disjoints du cercle, tel que l'intérieur de A contient le point fixe attracteur de f, l'intérieur de B contient le point fixe répulseur de f, l'intérieur de C contient le point fixe attracteur de g, l'intérieur de D contient le point fixe répulseur de D.

On remarque que pour n assez grand, $f^n(S^1 \setminus B) \subset A$ et $g^n(S^1 \setminus D) \subset C$ ce qui monter que l'on à un Ping Pong. □

Exercice 18. *Soit G un groupe isomorphe à un sous-groupe du groupe affine. Soit $\rho \colon G \to PSL(2, \mathbb{R})$ un morphisme. On suppose que $\rho(G)$ contient deux éléments A et B qui ont chacun deux valeurs propres réelles et de modules distinctes (autrement dit, A et B vues comme agissant sur S^1 sont des éléments hyperboliques).*

Montrez que A et B ont une direction propre commune. Indication: on montrera que, pour tout $x, y \in G$, $[[x, y], x[x, y]x^{-1}] = e_G$.

8.7. **Consequences.**

Corollaire 8.1. *L'écriture d'un mot d'un groupe libre par un mot réduit est unique.*

Corollaire 8.2. *Soit $\mathbb{F}_2$ le groupe libre a deux gérateurs (x, y). Alors les parties $(x, yxy^{-1}, ..., y^n xy^{-n})$ engendrent toutes des sous groupes libres à n generateurs.*

Le sous groupe engendré par tous les $y^n xy^{-n}$ n'admet pas de système fini de générateurs.

Démonstration : Considérons un Ping Pong $f, g \colon X \to X$ avec ses parties associées A, B, C, D $f(X \setminus B) \subset A$ et $g(X \setminus D) \subset C$.

Alors les parties $A, B, g(A), g(B), g(C)$ sont disjointes deux à deux (car A, B, C, D sont disjointes deux à deux ce qui impi $g(A), g(B)$ et $g(C)$ sont trois parties disjointes de C. De plus

$$gfg^{-1}(X \setminus g(B)) \subset g(A)$$

On montre alors par récurrence que les parties $A, B, g(A), g(B), \ldots g^n(A), g^n(B)$ sont disjointes deux à deux et que

$$g^n fg^{-n}(X \setminus g^n(B)) \subset g^n(A).$$

On a donc un Ping Pong associé à la famille de fonctions $f, gfg^{-1}, \ldots, g^n fg^{-n}, \ldots.$

□

En fait on peut montrer:

Théorème 12. *Tout sous groupe d'un groupe libre est libre.*

C'est un résultat difficile. Je n'en connais pas de preuve purement algébrique. La preuve que je connais consiste a remarquer que le groupe libre est le groupe fondamental d'un bouquet de cercle, et que tout sous groupe sera le groupe fondamental d'un revêtement de ce bouquet de cercles. Ce revêtement est un graphe, dont le groupe fondamental est un groupe libre.

9. Groupes libres engendrés par des homéomorphismes génériques

9.1. **Topologie de l'espace des Homeomorphismes ou difféomorphisme.** Soit X un espace compact métrique. On munit $Homeo(X)$ d'une distance

$$d(f,g) = \sup_{x\in X}\{d(f(x),g(x)), d(f^{-1}(x),g^{-1}(x)).$$

La toplogie associé a cette distance est la C^0-topologie.

On vérifie

Lemme 9.1. *$Homeo(X)$ est un groupe topologique: le produit et le passage a l'inverse sont continus. De plus $Homeo(X)$ est un espace métrique complet.*

Soit M une variété compacte. On munit $Diff^r(M)$ de la distance

$$d^r(f,g) = \sup_{x\in M}(d(f(x),g(x)) + \|Df(x) - Dg(x)\| + \|D^2f(x) - D^2g(x)\| + \ldots...$$

C'est expressions sont a calculer dans des cartes locales.

Munis de ces distances, $Diff^r(M)$ est un espace metrique localement complet. Des fermes complets sont les ensembles de difféomorphisme dont la norme de Df et de Df^{-1} sont bornées par une constante K. Cela forme une exhaustion par des fermés complets, chacun etant contenus dans l'intérieur de l'autre.

On a une métrique complete induisant la même topologie en considérant la distance :

$$d^r(f,g) = \sup_{x\in M}(d(f(x),g(x)) + \|Df(x) - Dg(x)\| + |Df^{-1}(x) - Dg^{-1}(x)| + \|D^2f(x) - D^2g(x)\| + \ldots...$$

9.2. **Propriété génériques.** Si $\mathcal{X}$ est un espace métrique complet, il vérifie la propriété de Baire:

Théorème 13. *Si $\mathcal{X}$ est un espace métrique complet, alors pour toute famille dénombrable $\mathcal{O}_i, i \in \mathbb{N}$ d'ouverts denses, l'intersection $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_i$ est une partie dense.*

Une partie de $\mathcal{X}$ est dite *résiduelle* si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Une proprié $\mathcal{P}$ est dite générique sur $\mathcal{X}$ si elle est vraie sur une partie résiduelle de $\mathcal{X}$. Par abbus de langage, on dit que les points génériques de $\mathcal{X}$ vérifient $\mathcal{P}$.

9.3. **Groupes libres engendrés par des homéomorphismes génériques.**

Théorème 14. *(Ghys) Il existe une partie résiduelle $\mathcal{F} \subset Homeo(S^1)^2$ telle que pour tout $(f,g) \in \mathcal{F}$ le groupe engendré par f et g est libre.*

(ce théorème reste vrai si on remplace S^1 par n'importe quelle variété compacte (ou meme non compacte mais il faut preciser la topologie utilisee) et pour les diffeomorphismes de classe C^r pour r quelconque).

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante:

Proposition 9.1. *Pour tout mot réduit ω de $\mathbb{F}_2$ l'ensemble des paires $(f,g) \in Homeo(S^1)^2$ qui vérifie la relation ω est d'intérieur vide.*

On dit que la relation ω est vérifié sur un triplet (x,f,g) si l'homéomorphisme $\omega(f,g)$ admet x comme point fixe.

Lemme 9.2. *Pour tout mot* ω*, l'ensemble des triplets* (x, f, g) *qui vérifient* ω *est un fermé de* $S^1 \times Homeo(S^1)^2$*.*

Cette proposition est elle même conséquence du lemme suivant.

Lemme 9.3. *Pour tout mot réduit* ω *l'ensemble des triplets* $(x, f, g) \in S^1 \times Homeo(S^1)^2$ *qui vérifient la relation* ω *est d'intérieur vide.*

Démonstration : On fait une preuve par l'absurde en supposant qu'il existe un ouvert de tiplets (x, f, g) qui vérifient une relation ω définie par un mot réduit. On considère le mot $\omega = w_k \dots w_1$ de plus petite longueur tel que qu'il existe un tel ouvert $\mathcal{O} \subset S^1 \times Homeo(S^1)^2$ sur lequel ω est vérifié.

Remarquons que pour tout $i < k$ et pour tout mot réduit $m = m_i \dots, m_1$, l'ensemble des (x, f, g) tels que la relation m est vérifiée sur (x, f, g) est un fermé (d'après le lemme) d'intérieur vide. L'ensemble des mot réduit de longueur inférieur à k est fini. L'union d'une famille finie de fermés d'intérieur vide est un fermé d'intérieur vide.

On en déduit qu'il existe un ouvert dense $\mathcal{O}_0$ dans $\mathcal{O}$ pour lequel aucune relation de longueur inférieure à k n'est vérifie. Cet ouvert contient un ouvert produit $U \times O_f \times O_g$.

Prenons (x, f, g) dans cet ouvert. Notons $x_0 = x$ et pour tout i notons et $x_i = \omega_i(f, g)(x)$. Les x_i sont des points deux à deux distincts. On fait une perturbation de l'homéomorphisme $h = w_i(f, g) \in \{f, g, f^{-1}, g^{-1}$ à support dans un voisinage U de x_{k-1} disjoint des $x_j, j \neq k-1$ de façon que $h(x_{k-1} \neq x$. On a toujours $\omega_{k-1}(\tilde{f}, \tilde{g})(x) = x_{k-1}$.

Mais $\omega(\tilde{f}, \tilde{g})(x) \neq x$ ce qui contredit le choix de x.

$\square$

10. Groupe affine par morceau

On considère le sous ensemble $\mathcal{PA} \subset Homeo_+([0,1])$ qui sont affines par morceaux.

Théorème 15. *Le groupe $\mathcal{PA}$ ne contient pas de sous groupe libre à deux générateurs.*

Plus précisément, nous allons montrer

Proposition 10.1. *Tout sous groupe non monogène à deux générateurs contient un sous groupe abélien libre de rang deux.*

On conclut en utilisant le fait que tout sous groupe du groupe libre est libre (ce ne peut donc pas être un sous-groupe abélien libre à deux générateurs.

Nous allons utiliser

Lemme 10.1. *Soient h_1 et h_2 deux homéomorphismes de $[0,1]$, de support disjoints, et tels que $h_i \neq id$ pour $i = 1, 2$. Alors le groupe engendré par h_1 et h_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.*

On peut faire une preuve directe de ce lemme. On peut aussi remarquer que $Homeo_+([0,1])$ est sans torsion. Un groupe abélien est donc toujours un groupe abélien libre. Il n'est pas monogène, (sinon tous les é'léments auraient le même support), il est donc libre à deux génerateurs.

On considère l'ensemble $Fix(f, g)$ des points fixes communs a f et g. Comme f et g sont affine par morceaux, $Fix(f, g)$ est l'union d'un nobre fini de points et de segments. En particulier, $[0,1] \setminus Fix(f, g)$ a un nobre fini de composantes connexes. Nous noterons $I_1, \ldots, I_k$ les adhérences des composantes connexes de $[0,1] \setminus Fix(f, g)$.

Nous utiliserons le lemme suivant, sur chacune des composantes I_j.

Lemme 10.2. *Si f et g sont des homéomorphismes croissants de $[0,1]$ sans points fixes communs sur $]0,1[$, alors, pour tous $x, y \in]0,1[$, il existe un élément h du groupe engendré par f et g tel que $h(x) < y$.*

Démonstration : On considère juste l'application $h_0 = \inf\{f, g, f^{-1}g^{-1}\}$ qui est un homéomorphisme sans points fixe sur l'intérieur $]0,1[$. □

10.1. Preuve du Théorème.

On suppose que $< f, g >$ est un groupe libre à deux générateurs.

Lemme 10.3. *Il existe un sous groupe $H \neq \{id\}$ de $< f, g >$ tel que tout $h \in H$ est de support contenu dans $[0,1] \setminus Fix(f, g)$.*

Démonstration : L'ensemble des élément de $< f, g >$ à support dans $[0,1] \setminus Fix(f, g)$ est clairement un sous groupe. Il suffit de montrer qu'il n'est pas trivial.

Pour cela on constate que le commutateur $fgf^{-1}g^{-1}$ n'est pas l'identité. Sinon f et g commutent. Alors ou bien $< f, g >$ est monogène, ou bien il contient un sous groupe libre a deux générateurs et on a fini.

Le commutateur $[f, g]$ est égal à l'identite au voisinage des points fixes communs $x_0$de f et g, car f et g sont affine sur les intervalles $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ et $[x_0, x_0 + \varepsilon[$. Donc ils commutent aux voisinage de x_0.

En consequence le support de $fgf^{-1}g^{-1}$ est contenu dans $[0,1] \setminus Fix(f, g)$, c'est à dire qu'il appartient à H. □

Pour tout $h \in H$ on note $S(h) \subset \{1, \dots, k\}$ l'ensemble des i tel que le support de h rencontre I_i, et $s(h)$ le cardinal de $S(h)$. Nous allons montrer:

Lemme 10.4. *Pour tout $h \in H$ il existe $h' \in H$ tel que $S(h') = S(h)$ mais il existe $i \in S(h)$ tel que $supp(h) \cap supp(h') \cap I_i = \emptyset$.*

Voyons comment conclure a partir de ce lemme. Le commutateur $h_1 = hh'h^{-1}h'{-1}$ vérifie $S(h_1) \subset S(h) \setminus \{i\}$ car h et h' commutent sur I_i. Donc $s(h_1) < s(h)$. Si $s(h_1) = 0$ alors $h_1 = i$ c'est a dire que h et h' commutent. Mais le groupe engendré par h et h' n'est pas monogène, car en restriction à I_i; d'après le lemme, c'est un groupe abélien libre à deux générateurs. Donc $< h, h' >= \mathbb{Z}^2$ et on a fini. Dans le cas contraire on recommence avec h_1 au lieu et place de h. Ou plus simplement, on choisit $h \neq id$ tel que$s(h)$ soit le plus petit possible.

Démonstration : Considerons $i \in S(h)$ et soit $[x, y] \subset Int(I_i)$ un segment tel que $supp(h) \cap I_i \subset I_i$. On considere un élement $\varphi \in < f, g >$ tel que $\varphi(x) > y$. Un tel élément existe car f et g induisent deux homéomorphismes de I_i sans point fixe commun. Remarquons que $\varphi([x, y]) \cap [x, y] = \emptyset$. Notons $h' = \varphi h \varphi^{-1}$. Alors $supp(h') = \varphi(supp(h))$. $\square$

11. Contrôle de distorsion 1: lemme de Kopell

11.1. Le lemme de Kopell.

Théorème 16. *Soit* $f: [0,+\infty[\to[0+\infty[$ *un difféomorphisme de classe* C^r, $2 \le r \le +\infty$. *On suppose que* 0 *est le seul point fixe de* f. *Soit* $g: [0,+\infty[\to[0,+\infty[$ *un difféomorphisme de classe* C^1. *On suppose que* g *commute avec* f.

Alors

$$Fix(g) \neq \{0\} \Longleftrightarrow g = id.$$

Autrement dit l'action du centralisateur $C_1(f)$ sur $]0,+\infty[$ est libre.

La preuve de ce théorème est l'ojet de cette section. Pour fixer les idées, et quitte à remplacer f par f^{-1} on supposera

$$f(x) < x, \text{ pour } x \neq 0.$$

Remarque 29. *Si* x_0 *est un point fixe de* g *alors toute l'orbite de* x_0 *pour* f *(i.e.* $\{f^i(x_0)\}$*) est composée de points fixes de* f. *Remarquons que*

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = 0$$

Donc 0 *n'est pas un point fixe isolé de* g. *Comme* g *est supposé de classe* C^1 *(au moins), on obtient:*

$$Dg(0) = 1.$$

11.1.1. *Contrôle de la distorsion de* Df^n*, dans un domaine fondamental de* f. Le principal ingrédient de la preuve de Kopell, qui est déjà la clé du Théorème de Denjoy, c'est le contrôle de la distorsion des itérés f^n de f.

La distorsion de f entre deux points y et z c'est le rapport des différentiellles $\frac{Df(y)}{Df(z)}$. Quand n tends vers l'infini lea différentielle Df^n peut aussi bien tendre vers 0 que l'infini ou osciler entre des constantes. Le rapport $\frac{Df^n(y)}{Df^n(z)}$ n'est donc pas a priori borné. On appelle contrôle de la distorsion, les réultat qui premettent de borner ce rapport, dans des situation bien précises.

C'est en général un type d'argument typique des regularités C^r, $r > 1$.

Théorème 17. *Soit* $x \in]0,+\infty[$. *Il existe* $C(x) > 1$ *tel que pour tout* $y, z \in [f(x), x]$, *pour tout* $n \ge 0$ *on ait*

$$\frac{1}{C(x)} \le \frac{Df^n(y)}{Df^n(z)} \le C(x).$$

Démonstration : On écrit $Df^n(y) = \prod_0^{n-1} Df(f^i(y))$. Les produits étant plus difficiles a contrôler que les sommes, on passe au log:

$$\left|\log(\frac{Df^n(y)}{Df^n(z)})\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \log Df(f^i(y)) - \log Df(f^i(z))\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |\log Df(f^i(y)) - \log Df(f^i(z))|.$$

Comme f est de classe C^2 et que $Df \neq 0$ (car f est un difféomorphisme), $\log Df$ est de classe C^1. Notons $c(x) = \sup_{y\in[0,x]} |\log Df(y)|$. Du théorème des accroissements finis on déduit:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\log Df(f^i(y)) - \log Df(f^i(z))| \leq c(x) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(y) - f^i(z)|.$$

Mais y et z on été chosi dans le même domaine fonamental $[f(x), x]$ et la somme des longueurs $\sum_{i=0}^{+\infty} \ell([f^{i+1}(x), f^i(x)])$ est précisément x.

On en déduit

$$\left|\log(\frac{Df^n(y)}{Df^n(z)})\right| \leq c(x) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(y) - f^i(z)| \leq xc(x).$$

Soit finalement

$$e^{-xc(x)} \leq \frac{Df^n(y)}{Df^n(z)} \leq e^{xc(x)}.$$

□

11.1.2. *Contrôle de la distorsion de g le long d'une orbite de f.* Soit G un difféomorphisme classe C^1 de $[0, +\infty[$, qui commute avec f. Alors on a

$$(DG)(f^n(x)) \cdot Df^n(x) = D(G \circ f^n)(x) = D(f^n \circ G)(x) = (Df^n)(G(x)) \cdot DG(x).$$

On réécrit

$$\frac{DG(x)}{(DG)(f^n(x))} = \frac{Df^n(x)}{Df^n(G(x))}.$$

Le contrôle de la disorsion de DG entre les points y et $f^n(y)$ pour n arbitrairement large, est donné donné par celui de la distorsion f^n entre les points y et $G(y)$.

11.1.3. *Majoration de la dérivée Dg^k sur $[f(x_0), x_0]$.* Fixons désormais x_0 un point fixe de g. On considère $G = g^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$ arbitraire.

Alors pour tout $y \in [f(x_0), x_0$ on a $G(y) \in [f(x_0), x_0]$. D'après de Théorème 17 on obtient:

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, tout $n > 0$ et tout $y \in [f(x_0), x_0]$ on a :

$$\frac{1}{C(c_0)} \leq \frac{Dg^k(y)}{(Dg^k)(f^n(y))} \leq C(x_0).$$

Faisons tendre n vers $+\infty$, y et k restant constant. Le point $f^n(y)$ tend vers 0. Comme g est supposé être de classe C^1, et donc g^k aussi, on a:

$$\lim_{n \to +\infty} Dg^k(f^n(y)) = Dg(0)^k = 1.$$

On vient d'obtenir le lemme suivant

Lemme 11.1. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in [f(x_0), x_0]$ on a:*

$$\frac{1}{C(c_0)} \leq Dg^k(y) \leq C(x_0).$$

On conclut la preuve en remarquant:

Lemme 11.2. *Soit g un difféomorphisme croissant d'un intervalle compact I (pour nous ce sera $[f(x_0), x_0]$). S'il existe K tel que pour tout k et tout $y \in I$, $Dg^k(y) < K$, alors la restriction de g à I est l'identité.*

Démonstration : Supposons que $g \neq id$ et soit $[a,b]$ l'adhérence d'un composante connexe de $I \setminus Fixg$. Supposons pour fixer les idée que $g > id$ sur $]a,b[$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k > 0$ tel que $g^k(a+\varepsilon) > b - \varepsilon$. Le théorème des accroissement finis implique qu'il exist $y \in [a, a+\varepsilon]$ tel que $Dg^k(y) = \frac{b-a-\varepsilon}{\varepsilon}$. Quand ε tend vers 0le quotient $\frac{b-a-\varepsilon}{\varepsilon}$ tend vers $+\infty$ donc devient supérieur à K, ce qui conclut.

□

11.2. **Difféomorphismes commutants de classe C^2 de $[0,1]$.**

Corollaire 11.1. *Soient f un difféomorphismes croissant de $[0,1]$. On suppose que f est de classe C^1 . Alors, pour tout $g \in Diff^2([0,1])$ qui commute avec f on a $Fix(f) \setminus Int(Fix(f) \subset Fix(g)$.*

Démonstration : x un point fixe de f qui n'est pas dans l'interieur. On l'itere par g: son orbite converge vers un poit fixe attracteur de g sur lequel on peut appliquer le lemme de Kopell, a g. Donc f etain l'identite sur toute la composante, ce qui contredit l'hypothèse. □

Corollaire 11.2. *Si $f \in Diff^2([0,1])$ est tel que $Fix(f)$ est d'intérieur vide, alors $C_2(f)$ est abélien.*

11.3. **Action des groupes nilpotents sur $[0,1]$.**

Etant donné un groupe, on note $G_1 = [G,G]$ le sous groupe de G engendré par les commutateurs de G. C'est toujours un sous-groupe distingué de G. En effet le conjugué d'un produit de commutateur est le produit du commutateur des conjugues.

On note $G_2 = [G, G_1]$ le sous groupe engendré par les commutateurs dont 1 des deux termes au moins appartient à G_1. le sous-groupe est distingues dans G et dans G_1.

Par récurrence on note $G_{i+1} = [G_i, G]$. C'est un groupe distingué dans G et donc aussi dans G_i.

Un groupe G est dit nilpotent s'il existe i tel que $G_i = \{e\}$.

Exemple 6. *Le groupe de transformation affine de $\mathbb{R}^2$ defini par $f : (x,y) \mapsto (x+1,y)$ $g : (x,y) \mapsto (x, y+x)$ et $h : (x,y) \mapsto (x, y-1)$.*

Alors h commute avec f et g mais $fgf^{-1}g^{-1} : (x,y) \overset{g^{-1}}{\mapsto} (x, y-x) \overset{f^{-1}}{\mapsto} (x-1, y-x) \overset{g}{\mapsto} (x-1, y-x+(x-1) \overset{f}{\mapsto} (x, y-1) = h(x,y)$.

Exercice 19. *Montrez que le groupe engendré par f, g, h est nilpotent.*

Théorème 18. *Si G est un groupe nilpotent alors pour tout $\rho\colon G \to Diff^2([0,1])$ l'image $\rho(G)$ est abélienne.*

Démonstration : On fait la preuve par récurrence sur la longueur de la suite de nilpotence du groupe.

On considère le noyau de ρ. Alors G/ρ est aussi nilpotent et sa suite est de longueur plus petite ou egale (si la suite est stritement plus courte, on a fini, par hypothese de recurrence), et ρ induit un isomorphisme de G/ρ sur $\rho(G)$. On peut donc supposer que ρ est un isomorphisme.

On considère le centre Z de G. Pour chaque $g \in Z$ le groupe G fixe les points de $Fixg \setminus Intfixg$. De plus, sur chanque compsante de $0, 1 - Fixg$ les autres élements de G sont ou bien l'identite, ou bien sans point fixe. Finalement, l'action de G sur l'adherence d'un comosante du compémentaire de $Fixg$ est abélienne, d'apres Kopell.

On considere l'adhérence de l'union de toute ses composantes pour tout $g \in Z$. c'est l'adérence des union des supports des elements de Z. Cette adhérence est invariante par G et l'action de G sur cette adhérence est abélienne. Le complémentaire est l'intérieur des points fixé par Z.

Prenons l'adhérence I une composante de $IntfixZ$. L'action G sur I passe au quotient en un groupe dont la suite est strictement plus petite. L'action y est donc abélienne par hypothèse de récurrence. $\square$

12. Difféomorphismes du cercle: théorie de Denjoy

12.1. **Contre-exemple de Denjoy.** On appelle contre-exemple de Denjoy tout homéomorphisme ou difféomorphisme du cercle, dont le nombre de rotation est irrationnel, et qui n'est pas conjugué à une rotation.

12.1.1. *Dynamique d'un contre-exemple de Denjoy.* Soit f un homéomorphisme du cercle et $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ son nombre de rotation.

Lemme 12.1. *Les propritétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *f possède une orbite qui est dense dans S^1*
(2) *toute les orbites de f sont denses dans S^1*
(3) *f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme préservant l'orientation.*

Démonstration : Il suffit de voir que, si l'orbite de x est dense, alors l'application $H_{x,0}$ est injective. □

Théorème 19. *Si f est un contre-exemeple de Denjoy alors il existe un ensemble de Cantor $\mathcal{C} \subset S^1$, invariant par f, et pour tout $x \in S^1$ $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{C}$. En particulier, f est minimal sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration : On sait que f n'a aucune orbite dense. Soit x un point et $\mathcal{C}$ son $\omega-$limite. Donc $\mathcal{C}$ est invariant par f. Le complementaire de $\mathcal{C}$ est une union d'intervalles I_i. Soit y un point de S^1. Supposons que $\omega(y)$ contienne un point z hors de $\mathcal{C}$, et donc $\exists i, z \in I_i$. On en déduit qu'il existe $n < m$ tel que $f^n(y) \in I_i$ et $f^m(y) \in I_i$. ceci implque $f^{m-n}(I_i) \cap I_i \neq \emptyset$. Comme f laisse invariant $S^1 \setminus \mathcal{C}$, l'image d'un I_j est exactement un I_k, et donc $f^{m-n}(I_i) = I_i$ ce qui implique que les extrmits de I_i sont fixes pour f^{m-n} c'est à dire périodiques. Ceci contredit le fait que le nombre de rotation de f est irrationnel. On a donc montré $\forall x, y,\ \omega(y) \subset \omega(x)$ et comme les rôles de x et y sont symétriques $\omega(x) = \omega(y) = \mathcal{C}$. On en déduit que tout orbite de $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{C}$: f est minimal sur $\mathcal{C}$.

De la même façon il existe $\mathcal{C}^-$ qui est l'α-limite de tout point de S^1. Comme $\mathcal{C}$ est compact et invariant, il contient l'α-limite de ses points ce qui implique $\mathcal{C}^- \subset \mathcal{C}$ et finalement $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}$ en renversant les rôles.

Il reste à montrer que $\mathcal{C}$ est un Cantor: il n'a pas de point isolé car, pour tout $x \in \mathcal{C}$, $x \in \omega(x)$ mais n'est pas périodique, donc il existe une suite de point $f^i(x)$ convergeant vers x et différent de x. C'est un compact de S^1. Finalement il est d'intérieur vide: si I est un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{C}$ alors tout x de $S^1 \setminus \mathcal{C}$ possède un itéré dans I, ce qui contredit l'invariance de $\mathcal{C}$.

Tout compact d'intérieur vide et sans point isolé de S^1 est un ensemble de Cantor. □

12.1.2. *Construction d'un contre exemple.*

Théorème 20. *Pour tout $\alpha \in S^1$, il existe un difféomorphisme f_α de classe C^1, de nombre de rotation α et qui n'est pas conjugué à la rotation R_α.*

12.2. **Contrôle de distorsion 2: Théorème de Denjoy.**

Théorème 21. *Si f est un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel, alors f est conjugé à une rotation.*

La preuve du théorème est aussi intéressante que son énoncé, et introduit l'une des idée maȋtresse des systèmes dynamiques de classe $\mathcal{C}^2$; le contrôle de la distorsion.

Définition 12.1. *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de S^1 dans $\mathbb{R}$ et soit I un intervalle de S^1. On appelle distorsion de f sur I le nombre*

$$Dist(f, I) = \max\{\log(\frac{f'(x)}{f'(y}), x, y \in I\} \geq 0$$

.

La distorsion est nulle si l'application est affine.

Soit $f\colon S^1 \to S^1$ un difféomorphisme de classe C^2. Je noterai $C(f) = \max_{x\in S^1} \frac{|f''(x)|}{f'x} >$ 0, en remarquant que $\frac{f''(x)}{f'x}$ est la dérivée de $\log\circ f'$.

Lemme 12.2. *Supposons que $f\colon S^1 \to S^1$ soit de classe C^2. Soit I un intervalle de S^1 et soit $n > 0$. On considère $\ell_n = \ell(f^n(I))$ et $L_n = \sum_0^{n-1} f^i(I)$. Alors*

$$Dist(f^n, I) \leq C(f)\cdot L_n.$$

Démonstration : On écrit $(f^n)'(x) = \prod_0^{n-1} f'(f^i(x))$.

Donc

$$\begin{array}{rcl}\log((\frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y}) & = & \sum_0^{n-1}\log(f'(f^i(x)) - \sum_0^{n-1}\log(f'(f^i(y)) \\ & = & \sum_0^{n-1}(\log(f'(f^i(x)) - \log(f'(f^i(y))) \\ & \leq & \sum_0^{n-1} C(f)\cdot l_i \\ & = & C(f)\cdot L_n\end{array}$$

□

Lemme 12.3. *Pour tout L il existe η tel que pour tout $I = [a, b]$ et tout n tel que $L_n(I) \leq L$, on ait la propriété suivante : soit $J = [a - \eta(b - a), b + \eta(b - a)]$, alors $L_n(J) \leq 3L$.*

Démonstration : On va montrer $L_i[a - \eta(b - a), a] \leq L_i(I)$ pour η bien choisi. Supposons qu'on l'ait montré pour $i-1$, on veut le montrer pour i. Cependant Le contôle de distorsion nous dit que

$$Dist(f^i, [a - \eta(b - a), a]) \leq C(f)L.$$

Remarquons

$$\begin{array}{rcl}\frac{\ell(f^i([a-\eta(b-a),a])}{\ell(f^i(I)} & \leq & \sup\{\frac{D(f^i)(x)}{D(f^i)(y)}, x, y \in [a-\eta(b-a), b]\}\frac{\ell[a-\eta(b-a,a]}{\ell(I)} \\ & \leq & e^{Dist(f^i,[a-\eta(b-a),b])}\eta \\ & \leq & e^{C(f).L}\eta\end{array}$$

par l'hypothèse de récurrence.

On en déduit que

$$\ell(f^i([a - \eta(b - a), a] \leq e^{C(f)\cdot L}\cdot\eta\cdot\ell(f^i(I)).$$

Il suffit d'avoir choisi $\eta < e^{-C(f)\cdot 2L}$ et l'on a $\ell(f^i[a-\eta(b-a) \leq \ell(f^i(I)$ ce qui permet de voir $L_i[a-\eta(b-a),a] \leq L_i(I)$. □

Nous pouvons à présent montrer le théorème de Denjoy:

Démonstration : Soit $\mathcal{C}$ le "minimal execptionnel de f, c'est à dire l'ensemble de Cantor invariant sur lequel la dynamique est minimal et que est l'omega-limite de tout point du cercle.

On considère une composante connexe I de $S^1 \setminus \mathcal{C}$ de longueur maximale; ceci est possible parce que la somme de toutes les longueurs de ces composantes est majorée par la longueur totale du cercle. Pour tout J il existe donc un nombre fini de ces composante qui soient de longueur supérieur à $\ell(J)$, ce qui permet de choisir l'un des plus grand.

D'autre part, tous les itérés de I sont disjoints. Comme précédemment, ceci implique:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \ell(f^i(I)) \leq \ell(S^1)$$

D'après le lemme, il existe un intervalle J contenant I dans son intérieur et tel que

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \ell(f^i(J)) \leq 3\ell(S^1)$$

et donc la distorsion de f^i pour i arbitraire est (uniformément) majorée par $3.C(f).\ell(S^1)$ sur cet intervalle.

Cependant, les extrémités de I sont dans l'intérieur de J, et appartiennent à $\mathcal{C}$, par définition. Ces points sont donc récurrents:

Lemme 12.4. *Il existe une infinité de $n > 0$ tel que $f^-n(I) \subset J$.*

Pout n assez grand la longueur de $f^{-n}(I)$ tend vers 0, donc il exste des poins de $f^{-n}(I)$ ou la dérivée est arbitrairement grande (plus que $e^{10C(f)\ell(S^1)}$, par exemple. Cependant $\ell(f^n(I)) \leq \ell(I)$, par choix de I et contient donc au moins un point de dérivée inférieure à 1. Ces deux points sont dans J ce qui contredit le controle de la distorsion.

□

13. Problème 1

Introduction. Nous avons vu en cours que le théorème de Kopell impliquait que tout sous-groupe nilpotent de $Diff_+^2([0,1]$ est abélien. Le but de ce problème est de construire un exemple de sous-groupe nilpotent, non-abélien de $Homeo_+([0,1])$.

13.1. **Construction des générateurs du sous-groupe.** Notons $f\colon [0,1] \to [0,1]$ un homéomorphisme croissant du segment $[0,1]$, tel que $f(x) > x$ si $x \notin \{0,1\}$. Soit x_0 un point de $]0,1[$. On note $h_0\colon [x_0, f(x_0)] \to [x_0, f(x_0)]$ un homéomorphisme croissant, différent de l'identité. On note $h\colon [0,1] \to [0,1]$ l'unique homéomorphisme qui commute avec f et dont la restriction à $[x_0, f(x_0)]$ est h_0.

Question 13.1. *Donnez l'expression de h sur $[f^i(x_0), f^{i+1}(x_0)]$.*

On définit $g\colon [0,1] \to [0,1]$ de la façon suivante:

1. $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
2. pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la restriction de g à $[f^i(x_0), f^{i+1}(x_0)]$ coincide avec h^{-i}:
$$\forall x \in [f^i(x_0), f^{i+1}(x_0)], \quad g(x) = h^{-i}(x).$$

Question 13.2. *Montrez que l'application g est bien définie et est un homéomorphisme croissant de $[0,1]$.*

Question 13.3. *Montrez que g et h commutent.*

Question 13.4. *Montrez que $fgf^{-1}g^{-1} = h$*

13.2. **Présentation fini du sous-groupe.** On note $\mathbb{F}_3$ le groupe libre à trois générateurs a, b, c. On note G le groupe défini par générateurs et relations qui admet la présentation suivante
$$G = < a, b, c | aba^{-1}b^{-1} = c, ac = ca, bc = cb > .$$

Question 13.5. *Soit $\rho_0\colon \mathbb{F}_3 \to Homeo_+([0,1]$ l'homomorphisme défini par $\rho_0(a) = f$, $\rho_0(b) = g$ et $\rho_0(c) = h$.*

1. *Montrez que les éléments $aba^{-1}b^{-1}c^{-1}$, $aca^{-1}c^{-1}$ et $bcb^{-1}c^{-1}$ appartiennent au noyau de ρ_0.*
2. *En déduire qu'il existe un homomorphisme $\rho\colon G \to Homeo_+([0,1])$ tel que $\rho(a) = f$, $\rho(b) = g$ et $\rho(c) = h$*

Question 13.6. *Montrez que pour tout élément ω de G il existe $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$ tel que*
$$\omega = a^\ell b^m c^n.$$

Indication: *vous pourrez raisonner par récurrence sur la longueur d'un mot représentant l'élément ω.*

Question 13.7.
1. *Soient $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$. Montrez que $f^\ell g^m h^n(x_0) = f^\ell(x_0)$. En déduire que, si l'homéomorphisme $f^\ell g^m h^n$ est l'identité, alors $\ell = 0$.*
2. *Montrez que la restriction de $g^m h^n$ au segment $[x_0, f(x_0)]$ coincide avec h^n. En déduire que, si l'homéomorphisme $f^\ell g^m h^n$ est l'identité, alors $n = 0$*
3. *en déduire que, si l'homéomorphisme $f^\ell g^m h^n$ est l'identité, alors $\ell = m = n = 0$.*

Question 13.8. *Montrez que l'action de G sur $[0,1]$ définie par ρ est fidèle.*

13.3. **Nilpotence.**

Question 13.9. *Montrez que le sous-groupe* $[G, G]$ *de* G *(groupe engendré par les commutateurs) est le sous-groupe* $< c >$ *engendré par* c*. En déduire que le groupe* G *est nilpotent.*

13.4. **Régularité.** On suppose à present que:

- l'homéomorphisme f est un difféomorphisme de classe C^2,
- l'homéomorphisme h_0 est un difféomorphisme de classe C^2 de $[x_0, f(x_0)]$,
- la dérivée de h_0 en x_0 et en $f(x_0)$ est égale à 1,
- la dérivée seconde de h_0 est nuelle aux points x_0 et en $f(x_0)$

Question 13.10. *Montrez que les restrictions de* f*,* g *et* h *à l'intervalle ouvert* $]0, 1[$ *sont des difféomorphismes de classe* C^2

Question 13.11. *Montrez que* h *n'est pas un difféomorphisme de* $[0, 1]$.

14. Problème 2

Ce problème est indépendant du problème numéro 1, et les notations sont elles aussi indépendantes.

Introduction. Le théorème de Hölder et la théorie de Denjoy permettent de montrer qu'un sous-groupe de $Diff^2_+(\mathbb{R})$, finîment engendré, dont l'action naturelle sur $\mathbb{R}$ est libre, est conjugué à un groupe de translations:

- le théorème de Hölder assure que le groupe est semi conjugué à un groupe de translation;
- si le groupe n'est pas monogène, la semi-conjugaison est une conjugaison si et seulement si le groupe possède une orbite dense dans $\mathbb{R}$;
- dans le cas où le groupe est finîment engendré, le fait qu'il ne soit pas monogène signifie que l'un des nombres de translation relatifs est irrationnel;
- si les générateurs sont de classe C^2, la théorie de Denjoy permet alors de montrer que toutes les orbites sont denses dans $\mathbb{R}$, et donc que le groupe est conjugué à un groupe de translation.

Le but de ce problème est de montrer que l'hypothèse "*finîment engendré*" est nécessaire: on construit un groupe de difféomorphismes analytiques de $\mathbb{R}$ agissant librement sur $\mathbb{R}$, mais qui n'est pas conjugué à un groupe de translations. Ce groupe n'est pas finîment engendré: il n'est pas monogène, bien que tous les nombres de translation relatifs soient rationnels.

Pour tout$\alpha \in \mathbb{R}$, on note T_α la translation $x \mapsto x + \alpha$

14.1. Conjugaison analytique des translation T_1 et T_3.

Question 14.1. (1) *Montrez qu'un difféomorphisme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une conjuguaison de T_1 à T_3 (c'est à dire $fT_1f^{-1} = T_3$) si et seulement s'il existe une application $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait*

$$f(x) = 3x + 3\varphi(x) \text{ et } \frac{d}{dx}\varphi(x) > -1.$$

(2) *Donnez un exemple de difféomorphisme analytique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conjuguant T_1 à T_3 et possédant au moins deux points fixes.*

On fixe désormais $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un difféomorphisme conjuguant T_1 à T_3 et possèdant au moins deux points fixes.

Question 14.2. (1) *Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:*

$$f(x+1) = f(x) + 3.$$

(2) *en déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a:*

$$f(x+n) = f(x) + 3n$$

(3) *en déduire que, si $x < y$ sont des points fixes de f, alors $y - x < 1$*

On note $x_0 = minFixf$ et $x_1 = maxFixf$. Par notre choix de f nous avons $x_0 < x_1$.

Question 14.3. *Montrez que toute orbite de T_1 rencontre $[x_0, x_1]$ en au plus un point.*

14.2. **Construction d'un sous-groupe agissant librement sur $\mathbb{R}$.** On pose $g_0 = T_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $g_n = f^n g_0 f^{-n}$.

Question 14.4. *Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a*

(1) $Fix(g_n) = \emptyset$*;*
(2) $g_{n+1} = g_n^3$

On note $\mathcal{G} \subset Diff(\mathbb{R})$ le sous-groupe engendré par la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Question 14.5. *Montrez que, pour tout $h \in \mathcal{G}$, il existe $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $h = g_i^j$.*

A l'aide de la Question 14.4, montrez que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe abélien de $Diff(\mathbb{R})$ dont l'action naturelle sur $\mathbb{R}$ est libre.

On note $\prec$ l'ordre sur $\mathcal{G}$ défini par $h_1 \prec h_2 \Leftrightarrow h_1(0) < h_2(0)$. Nous avons vu dans la preuve du Théorème d'Hölder que $\mathcal{G}, \prec$ est un groupe ordonné isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Question 14.6. *En utilisant la Question 14.4 montrez que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a l'inégalité:*

$$id \prec g_n \prec g_{n+1}.$$

En déduire que $\mathcal{G}$ n'est pas monogène.

14.3. **Non-conjugaison du sous-groupe à un groupe de translations : non-densité des orbites.**

Question 14.7. *Montrez que toute orbite de g_n rencontre $[x_0, x_1]$ en au plus un point.* Indication: *Utilisez la Question 14.3, la définition de g_n et la définition des points x_0 et x_1.*

Question 14.8. *Déduire de la Question 14.7 le fait que toute orbite de $\mathcal{G}$ rencontre le segment $[x_0, x_1]$ en au plus un point.*

Question 14.9. *Déduire des questions précédentes le fait que l'action naturelle de $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas conjuguée à celle d'un groupe de tranlations.*

14.4. **Difféomorphismes du cercle.** On suppose désormais que l'application f a été choisie analytique et d'inverse analytique.

Question 14.10. (1) *Montrez que $\mathcal{G}$ agit naturellement sur le cercle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par des difféomorphismes analytiques.*

Indication: Montrez que tout $h \in \mathcal{G}$ commute avec la translation T_1. En déduire que h passe au quotient par la projection naturelle de $\mathbb{R}$ sur $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en un difféomorphisme analytique du cercle.

(2) *Cette action de $\mathcal{G}$ sur S^1 est-elle fidèle?*

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on note $\tilde{g}_n$ le difféomorphisme du cercle induit par g_n.

Question 14.11. *Quel est le nombre de rotation du diffeomorphisme $\tilde{g}_n$?*

Question 14.12. *Décrivez, à homéomorphisme prêt, les minimaux de l'action de $\mathcal{G}$ sur le cercle S^1.*

15. Problème 3

15.1. Premier exercice.

Exercice 20. (1) *Soit G un groupe fini. Montrez que tout morphisme de $\varphi\colon G \to Homeo_+(\mathbb{R})$ est trivial, c'est-à-dire $\varphi(G) = Id$.*

(2) *Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus que les homeomorphismes sont croissants? Autrement dit, existe-t-il un morphisme non trivial d'un group fini G à valeurs dans $Homeo(\mathbb{R})$?*

15.2. Le problème.

On note $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle et $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. Le but de ce problème est de montrer:

Théorème 22. *Soit G un sous-groupe de $Homeo(S^1)$ tel que, pour tout $g \in G \setminus \{id\}$, g a au plus un point fixe. Alors G est abélien.*

La preuve de de théorème a été décomposée en une suite de questions:

Question 15.1. *Montrez qu'un homéomorphisme de S^1 qui inverse l'orientation a au moins deux points fixes.*

Question 15.2. *Montrez que pour tout $f \in G$ et tout relevé F de f sur $\mathbb{R}$ alors*
- *ou bien $F(x) \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
- *ou bien $F(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Question 15.3. *Supposons que G agisse librement (i.e. sans point fixe) sur S^1. Notons $\tilde{G} \subset Homeo(\mathbb{R})$ l'ensemble des relevés de G sur $\mathbb{R}$. Montrez que $\tilde{G}$ est un groupe qui agit librement sur $\mathbb{R}$. En déduire que G est abélien.*

On suppose désormais que l'action de G sur S^1 n'est pas libre. Il existe donc $f_0 \in G \setminus \{id\}$ et $\bar{x}_0 \in S^1$ tel que $f_0(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$.

Question 15.4. *Montrez que f_0 possède un relevé $F_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant un point fixe x_0.*

Question 15.5. *Supposons que G possède un élément g ayant un point fixe $y \neq x_0$. Montrez que G possède un élément $h \neq Id_{S^1}$ qui possède au moins 2 point fixes.*

Question 15.6. *Déduire de la question précédente le fait que x_0 est un point fixe global de l'action de G: pour tout $g \in G$, $g(x_0) = x_0$.*

Question 15.7. *Montrez que G agit librement sur $S^1 \setminus \{x_0\}$. En déduire que G est abélien.*

16. Problème 4

Je rappelle qu'une action engendrée par un morphisme $\varphi\colon G \to Homeo_+(\mathbb{R})$ est dite *fidèle* si φ est injectif. On dit qu'un ordre $\leq$ sur G est *invariant à gauche* si pour tout $f, g, h \in G$ on a:

$$f \leq g \Longleftrightarrow h \circ f \leq h \circ g.$$

Le but de ce problème est de montrer:

Théorème 23. *Soit G un groupe dénombrable. G possède un ordre total invariant à gauche si et seulement G admet une action fidèle $\varphi\colon G \to Homeo_+(\mathbb{R})$.*

16.1. Supposons d'abord que $\varphi\colon G \to Homeo_+(\mathbb{R})$ est un morphisme injectif.

Question 16.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\leq_x$ la relation sur G définie par,*

$$\textit{pour tout } f, g \in G, \quad (f \leq_x g \Longleftrightarrow \varphi(f)(x) \leq \varphi(g)(x))\,.$$

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation $\leq_x$ est un ordre invariant par multiplication à gauche:

$$\textit{pour tout } f, g, h \in G, \quad (f \leq_x g \Rightarrow hf \leq hg)\,.$$

Question 16.2. *Montrez sur un exemple que cet ordre $\leq_x$ n'est pas nécessairement invariant à droite.*

On choisit une partie dénombrable $X = \{g = x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.

Question 16.3. *Pour tout $f, g \in G$ tels que $f \neq g$ montrez qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(f)(x_i) \neq \varphi(g)(x_i)$.*

Pour tout $f, g \in G$ on note $f < g$ si $\varphi(f)(x_i) < \varphi(g)(x_i)$ pour $i = \inf\{j | \varphi(f)(x_j) \neq \varphi(g)(x_j)\}$.

Question 16.4. *Montrez que $<$ est une relation d'ordre sur G.*

Question 16.5. *Montrez que $<$ est un ordre total sur G, et qu'il est invariant à gauche.*

Nous avons donc montré l'un des sens du théorème: il reste a montrer la réciproque, qui est l'objet de la section suivante:

16.2. **Supposons à présent que G possède un ordre total $\prec$ invariant à gauche.**

Question 16.6. *Montrez que, si G n'est pas le groupe $\{1_G\}$, alors pour tout $g \in G$ il existe $f, h \in G$ tels que*

$$f \prec g \prec h.$$

En déduire que G est infini.

Comme (par hypothèse) le groupe G est dénombrable, on peut numéroter par $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les éléments de G.

On définit une application $h\colon G \to \mathbb{R}$ par récurrence de la façon suivante:

(1) $h(g_0) = 0$

(2) supposons h définit pour tout g_i, $i \leq n$. On définit alors $h(g_{n+1})$ par

- si $g_i \prec g_{n+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, alors on définit
$$h(g_{n+1}) = \sup\{g_i, 0 \leq i \leq n\} + 1;$$
- si $g_i \succ g_{n+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, alors on définit
$$h(g_{n+1}) = \inf\{g_i, 0 \leq i \leq n\} - 1;$$
- si il existe $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ tels que $g_i \prec g_{n+1} \prec g_j$, alors on définit
$$h(g_{n+1}) = \frac{h(g_i) + h(g_j)}{2}$$
.

Question 16.7. *Montrez que l'application h est bien définie et qu'elle est une injection croissante de G dans de $\mathbb{R}$.*

On note $X = h(G)$ l'image de G par h.

Question 16.8. *Montrez (par exemple à l'aide de la question 16.6) que X n'est ni majorée ni minorée.*

(Attention! la question suivante est certainement la plus difficile du problème: vous l'admettrez si necessaire).

Question 16.9. *On suppose que $A, B \subset G$ sont deux parties telle que pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a < b$. Montrez que l'on a l'une des trois possibilité suivantes:*

- $\sup h(A) = \inf h(B)$*;*
- *il existe $c \in G$ tel que pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on ait $a < c < b$;*
- *il existe $a_+ \in A$ et $b_- \in B$ tel que, pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on ait $a \leq a_+ < b_- \leq b$ (autrement dit, a_+ est le maximum de A et b_- le minimum de B).*

Indication: pour tout $\varepsilon > 0$ considerez $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $g_i \in A$, $g_j \in B$,

$$\sup h(A) - \varepsilon < h(g_i) < h(g_j) < \inf(h(B)) + \varepsilon.$$

Pour tout $g \in G$, on note $F_g\colon X \to X$ l'application définie par

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \quad F_g(h(g_i)) = h(gg_i).$$

Question 16.10. *Montrez que l'application F_g est une bijection croissante de X.*

Question 16.11. *Montrez que pour tout $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $F_g(x) = y$.*

En utilisant par exemple la question 16.9 vous montrerez:

Question 16.12. *Pour tout $g \in G$ l'application F_g se prolonge par continuité à l'adhérence $\bar{X}$ de X.*

On note $\tilde{F}_g$ l'application obtenue en prolongeant F_g à $\mathbb{R}$ de façon affine sur les composantes du complémentaire de $\bar{X}$: si $]a, b[$ est une composante connexe de $\mathbb{R}$
$barX$ alors la restriction de $\tilde{F}_g$ à $]a, b[$ est l'unique application affine croissante qui est une bijection de $]a, b[$ sur $]F_g(a), F_g(b)[$.

Question 16.13. *Montrez que l'application $\tilde{F}_g$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$.*

Question 16.14. *Montrez que l'application $\tilde{F} \colon G \to Homeo_+(\mathbb{R})$, $g \mapsto \tilde{F}_g$ est un morphisme injectif (donc qu'il induit une representation fidèle).*

Christian Bonatti bonatti@u-bourgogne.fr
Université de Bourgogne,
Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584 du CNRS, BP 47 870,
21078, Dijon Cedex, France.